Table des matières MATH-F314 : Groupes

Références :

Cornwell "Group Theory in Physics" Vol. 1 & 2

Wu-Ki Tung "Group Theory in Physics"

Henneaux "Groupes et représentations" Notes de cours

Notes de Cours - MATH-F314

Théorie des groupes

1 Introduction & Motivation

* Au niveau le plus essentiel, la notion de groupe est nécessaire pour organiser et classifier les symétries. Or les symétries sont bien entendu cruciales pour la compréhension physique de la Nature. Une systématisation de la notion de symétrie est donc ~~atteint~~ un pré-requis pour une formulation précise des lois (et des théories) physiques. En fait, on peut dire sans problèmes que la spécification des symétries présentes est au coeur, et en est le point de départ, de toutes les théories modernes en physique. Bien entendu il n'est pas besoin de motiver l'intérêt de formuler rigoureusement les symétries du point de vue d'un/e mathématicien/ne...

* La notion de groupe intervient, comme l'indique la signification du mot en langage commun, quand plusieurs symétries du même type sont présentes.

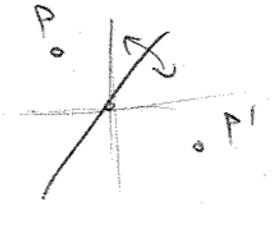
* Une symétrie est une *action* sur un système physique (ou géométrique, dans sa schématisation) qui ne change pas les propriétés du système. Un système peut être invariant sous plusieurs actions de symétrie, il est dès lors intéressant de savoir comment ces différentes actions se composent quand elles agissent l'une après l'autre.

* On va voir qu'il est possible de caractériser la composition des actions de symétries en faisant abstraction du système sur lequel elles peuvent agir. Ceci est la *théorie des groupes*.

* On verra que les même groupes de symétries peuvent agir sur des systèmes différents. En termes techniques, on appelle cela des *isomorphismes* entre groupes.

* Il existe des groupes discrets et des groupes continus.

- *groupes discrets* : ont un nombre fini ou dénombrable d'éléments. Par exemple les réflexions par rapport à une droite d'un plan : 2 éléments ($\mathbb{Z}_2$)



. $P \leftrightarrow P'$

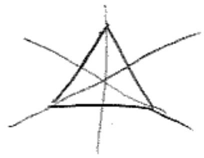
et $P \leftrightarrow P$, $P' \leftrightarrow P'$

(l'identité est toujours une action symétrique)

- Les ~~permutation~~ rotations de n racines de l'unité sur le plan complexe : il y a n éléments (y compris l'identité)

($\mathbb{Z}_n$)

- Les permutation de n éléments. Par exemple 3
  (1 2 3) → (2 1 3), (3 2 1), (1 3 2), (2 3 1), (3 1 2)
  même nombre et même structure que les symétries du triangle équilatéral.
  (S_3)



- Les translations discrètes de la droite

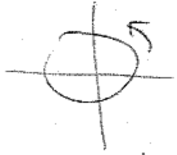
($\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z},+$)

- <u>groupes continus</u> : il y a une infinité d'éléments, qui dépendent de paramètres continus.

- Les translations continues de la droite

($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R},+$)

- Les rotations du cercle $|z|=1$ dans $\mathbb{C}$:

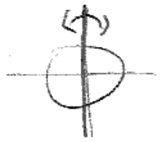


($U(1)$ ou $SO(2)$)

- Les rotation de la sphère S^2 dans $\mathbb{R}^3$

($SO(3)$ → objet central du cours!)

[⚠ * Un groupe peut être continu et contenir des éléments discrets : ex : les symétries (pas uniquement rotations) du cercle dans $\mathbb{R}^2$:



($O(2)$)]

* Les groupes continus ont une propriété très importante : la plus grande partie de leurs caractéristiques peuvent être déterminées en regardant les éléments infinitésimalement proches de l'identité.

Comme une fonction peut être approximée par sa ~~dérivée~~ tangente en un point, un groupe peut être "approximé" par ses éléments proches de l'identité, qui constituent un espace vectoriel (donc linéaire) appelé <u>algèbre</u>.
Il sera beaucoup plus aisé de travailler avec l'algèbre qu'avec le groupe, mais tout résultat se transpose directement. (Aux éléments discrets près, s'il y en a dans le groupe !)

* Les transformations linéaires d'espaces vectoriels sont bien entendu des actions de symétrie. Elles ~~sont~~ peuvent être écrites en termes de <u>matrices</u> réelles ou complexes (si l'espace est sur les réels ou les complexes), en se donnant une base de l'espace vectoriel.

* On verra que tout groupe, ~~and~~ et toute algèbre, peut être écrite comme un groupe de matrices, en d'autres termes comme un ensemble de transformations linéaires agissant sur un espace vectoriel.

* En fait, chaque groupe peut être écrit comme un groupe de matrices d'une infinité de façons différentes, avec des matrices (carrées !) de dimension grandissante. Le groupe de matrices est une représentation du groupe.

* Ce qui est remarquable, c'est que dès que la structure "minimale" de groupe est connue, on peut déterminer systématiquement toutes les possibles représentations. On verra des exemples physiques de cette notion importante mais plus subtile à visualiser.

* Le but du cours est de prime abord de se familiariser avec la notion de groupe, ensuite d'étudier plus en détail les groupes

continus les plus importants en physique :

- le groupe des rotations, important en mécanique classique et quantique, en physique de la matière condensée, etc.

- le groupe de Lorentz, c-à-d le groupe des transformations de la relativité restreinte, (rotations et boosts).

- le groupe de Poincaré, où l'on adjoint aux transformations de Lorentz aussi les translations d'espace-temps. Ces deux groupes sont la base incontournable de la théorie quantique des champs, et donc de la physique des particules, et de la gravitation (relativité générale).

② Théorie des groupes : généralités

On commence par la définition de groupe :

Déf un groupe G est un ensemble d'éléments, muni d'une opération (produit / multiplication) qui satisfait aux propriétés suivantes :

- $\forall g_1, g_2 \in G$ alors $g_1 g_2 \in G$
  (le produit est interne à G)

- $\forall g_1, g_2, g_3 \in G$ alors $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$
  (le produit est associatif)

- $\exists e \in G$ tel que $\forall g$, $ge = eg = g$
  (e est l'identité de G)

- $\forall g \in G$, $\exists g^{-1} \in G$ tel que $g^{-1} g = g g^{-1} = e$
  (g^{-1} est l'inverse de g)

* la première propriété est souvent incluse dans la définition du produit (ici, aucun signe sera écrit pour dénoter le produit de 2 éléments de groupe)

* l'associativité est toujours assurée dans tous les exemples qu'on verra → on ne s'en préoccupera plus.

* Il est facile de montrer que l'identité est unique dans G, ainsi que g^{-1} est unique $\forall g \in G$; aussi on a trivialement $e^{-1} = e$.

* Notons par contre qu'en toute généralité le produit n'est pas commutatif : $g_1 g_2 \neq g_2 g_1$ en général.

  Un groupe tel que $g_1 g_2 = g_2 g_1$ $\forall g_1, g_2 \in G$ est appelé commutatif ou <u>abélien</u>.

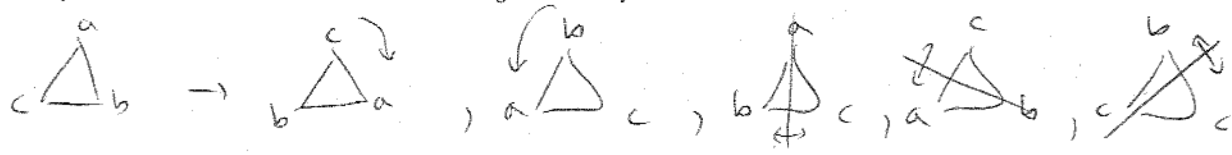
* Comme on l'a vu dans l'introduction, on distingue les groupes en <u>groupes (discrets) finis</u> avec un nombre d'éléments fini ; <u>groupes discrets infinis</u> avec un nombre infini dénombrable d'éléments ; et <u>groupes continus (infinis)</u> avec un nombre infini continu d'éléments, généralement dépendant de paramètres continus. Attention : la <u>dimension</u> d'un groupe fini est le nombre de ses éléments. Par contre la dimension d'un groupe continu est le nombre de paramètres continus indépendants desquels dépendent ses éléments.

* Exemples

- les nombres $\{1, -1\}$ et la multiplication :
  → groupe fini abélien de dimension (ordre) 2.
- les nombres $\{0, 1\}$ et l'addition modulo 2 :
  → groupe fini abélien de dimension 2.
- la réflexion du plan euclidien $(x,y) \to (-x,y)$ définit, avec l'identité $(x,y) \to (x,y)$ un groupe fini abélien de dimension 2.
- nombres complexes $e^{2\pi i \frac{k}{N}}$ $(k=0,..N-1)$ avec la multiplication ; les nombres $\{0,1,..,N-1\}$ avec l'addition modulo N ; les rotations du plan Euclidien d'angle $2\pi\frac{k}{N}$ $(k=0,...,N-1)$
  → groupe fini abélien de dimension N.
- permutations de 3 lettres (abc) → (bac) (acb) (cba) (bca) (cab)

  non abélien : abc → bac → bca
  abc → acb → cab

  groupe fini non abélien de dim. 6
- symétries du triangle équilatéral



groupe fini non abélien de dim 6.

- $\mathbb{Z},+$ groupe infini discret. (abélien)
- $\mathbb{R},+$ groupe infini continu. Sa dimension est 1 car les élément du groupe, $x \in \mathbb{R}$, dépendent d'un paramètre (réel), x lui-même. (abélien)
- les rotations du plan euclidien d'angle θ quelconque sont un groupe continu abélien de dimension 1 (1 paramètre réel, θ).
- les rotation de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ sont un groupe non abélien continu de dimension 3 : ce sera l'objet principal du cours!

* En généralisant : les rotations sont communément écrites comme des matrices agissant sur les coordonnées (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$. On peut donc s'intéresser aux groupes de matrices.

- les matrices M agissant sur n coordonnées réelles $\in \mathbb{R}^n$ constituent un groupe si on s'assure qu'elles ont un inverse M^{-1} → on doit demander $\det M \neq 0$.

  C'est le groupe $GL(n,\mathbb{R})$.

  ~~Sa dim~~ comme c'est des matrices $n \times n$, on a que $\dim GL(n,\mathbb{R}) = n^2$ (chaque élément de M est un paramètre continu, $\det M \neq 0$ ~~exclu un ensemble de mesure~~ exclut un sous-ensemble de $\dim = n^2-1$)

- si les matrices agissent sur $x \in \mathbb{C}^n \to GL(n, \mathbb{C})$ de dim $2n^2$.

* On peut définir des groupes de matrices plus "petits" en imposant des conditions sur M.

- M agit sur $x \in \mathbb{R}^n$ et préserve la norme euclidienne :

$$x^T y = x^T M^T M y \quad \forall x, y \iff M^T M = \mathbb{1} \iff M^{-1} = M^T$$

groupe orthogonal $O(n)$ $\quad$ $\dim = \frac{n(n-1)}{2}$

- M agit sur $x \in \mathbb{C}^n$ et préserve la norme hermitienne :

$$x^\dagger y = x^\dagger M^\dagger M y \quad \forall x, y \iff M^\dagger M = \mathbb{1} \iff M^{-1} = M^\dagger$$

groupe unitaire $U(n)$ $\quad$ $\dim = n^2$

- M agit sur $x \in \mathbb{R}^{2n}$ et préserve la norme symplectique :

$$x^T \omega y = x^T M^T \omega M y \quad \forall x, y \qquad \left(\omega = \begin{pmatrix} & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \omega^2 = -\mathbb{1} \\ \omega^T = -\omega \end{array} \right)$$

$$\iff M^T \omega M = \omega \iff M^{-1} = -\omega M^T \omega$$

groupe symplectique $Sp(2n)$ $\quad$ $\dim = n(2n+1)$

* On voit donc que pour $M \in O(n)$, en tant que matrice $n \times n$ à déterminant non nul, elle appartient aussi automatiquement à $GL(n, \mathbb{R})$. Donc en quelque sorte $O(n)$ est contenu dans $GL(n, \mathbb{R})$

* On arrive donc à la notion de <u>sous-groupe</u> :

<u>déf</u> Si G est un groupe et H un sous ensemble des éléments de G, H est un sous groupe de G si H est lui même un groupe. En pratique il faut montrer que

- $e \in H$
- $\forall h_1, h_2 \in H$, $h_1 h_2 \in H$
- $\forall h \in H$, $h^{-1} \in H$.

* Par exemple, $O(n)$ est donc un sous groupe de $GL(n, \mathbb{R})$, et $U(n)$ un sous groupe de $GL(n, \mathbb{C})$.

* Grâce à la propriété des déterminants que $\det(M_1 M_2) = \det M_1 \det M_2$, on obtient aussi des sous groupes en imposant la condition $\det M = 1$

- $M \in GL(n, \mathbb{R})$ tel que $\det M = 1$ $\rightarrow SL(n, \mathbb{R})$
- $M \in O(n)$ tel que $\det M = 1$ $\rightarrow SO(n)$
- $M \in U(n)$ tel que $\det M = 1$ $\rightarrow SU(n)$

* On peut aussi définir le <u>produit direct</u> de deux groupes. Si G_1 et G_2 sont deux groupes on définit le produit direct $G_1 \times G_2$ par les couples (g_1, g_2) avec $g_1 \in G_1$ et $g_2 \in G_2$, et le

produit suivant :

$$(g_1, g_2) \cdot (g_1', g_2') = (g_1 g_1', g_2 g_2')$$

La structure de groupe de $G_1 \times G_2$ suit trivialement de celle de G_1 et G_2.

On généralise aisément à $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_k$.

* Tout aussi trivialement, on a que G_1 et G_2 sont des sous groupes de $G_1 \times G_2$.

---

* Pour voir quelles relations il y a entre différents groupes (ou des groupes définis différemment), il faut considérer des application d'un groupe à un autre : $f : G \to G'$, $g \to f(g)$ avec G et G' des groupes.

* déf une application est un <u>homomorphisme</u> si $\forall g_1, g_2 \in G$, $f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2)$

en d'autre termes, l'application f "traduit" la structure du groupe G dans le groupe G'.

* On peut facilement démontrer que $f(e) = e'$ c'est l'identité de G', et que $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$

* Comme pour toute application, on peut vérifier l'injectivité et la surjectivité d'un homomorphisme f.
En d'autre termes, on peut déterminer son <u>noyau</u> et son <u>image</u> :

$$\ker f = \{ g \in G \text{ tel que } f(g) = e' \}$$

$$\operatorname{Im} f = \{ g' \in G' \text{ tel que } \exists g \in G, \text{ avec } f(g) = g' \}$$

on écrit aussi $\ker f = f^{-1}(e')$ et $\operatorname{Im} f = f(G)$

Il est facile de montrer que $\ker f$ est un sous groupe de G, tandis que $\operatorname{Im} f$ est un sous groupe de G'.
[Si $\ker f = \{e\}$ f est injectif, si $\operatorname{Im} f = G'$ f est surjectif.]

* Si f est bijectif ($\ker f = \{e\}$ et $\operatorname{Im} f = G'$) alors on appelle f un <u>isomorphisme</u>, et on déclare que G et G' sont <u>isomorphes</u>, <u>$G \simeq G'$</u>

* f peut être une application de G en G lui-même.
~~en~~ Si c'est un isomorphisme, on parle dans ce cas d'<u>automorphisme</u> de G.
[L'ensemble des automorphismes de G est lui-même un groupe, appelé $\operatorname{Aut}(G)$.]

- Exemples : on peut montrer que tous les exemples de groupes finis à 2 éléments vus précédemment sont isomorphes entre eux ; de même, les 3 groupes abéliens à n élément sont isomorphes.
- On verra ~~des~~ exemples importants plus tard, reliant SO(3) à SU(2) ~~par~~ entre autres.

---

* Les groupes sont eux-mêmes des objets très symétriques. On peut s'en rendre compte en faisant agir ~~les~~ leurs éléments les uns sur les autres. De façon plus précise on parle de conjugaison par un élément $g \in G$ d'un élément $g' \in G$ ~~ds~~ pour l'opération suivante :

$$g g' g^{-1} = g''$$

$g'' \in G$ est alors appelé l'élément conjugué de g' par g.

* si g' et g'' sont conjugués, et g'' et g''' sont conjugués, alors g' et g''' sont conjugués (trivial !)

* les élément conjugués dans un groupe ~~sont c~~ peuvent être considérés (colloquialement) comme "semblables".

Par exemple, $\forall g \in G \quad g e g^{-1} = e$ et donc l'identité est uniquement conjuguée à elle-même.

* Une <u>classe de conjugaison</u> est ~~l'ensemble~~ un ensemble contenant tous les éléments du groupe conjugués entre eux. Si on prend un élément de la classe, on obtient tous les autres (et rien d'autre) en agissant par conjugaison avec tous les éléments du groupe.

* Tout élément du groupe appartient à une et une seule classe de conjugaison.

* Un sous groupe H de G est <u>invariant</u> ou <u>normal</u> si $\forall h \in H$, $\forall g \in G$ $\quad ghg^{-1} \in H$

 on peut aussi écrire $\quad gHg^{-1} = H$

 ou encore dire que H est composé de classes de conjugaison complètes.

* <u>Exemples</u> : pour un groupe abélien, comme $gg'g^{-1} = gg^{-1}g' = g'$ chaque élément est une classe de conjugaison d'un élément.

* Pour le groupe S_3, on a 3 classe de conjugaison :

$$\underbrace{\{(abc)\}}_{\text{identité}}, \quad \underbrace{\{(bac), (cba), (acb)\}}_{\substack{\text{transpositions} \\ \text{(réflexions)}}}, \quad \underbrace{\{(bca), (cab)\}}_{\substack{\text{perm. cycliques} \\ \text{(rotations)}}}$$

le sous groupe {id + perm. cycl.} est un sous groupe normal.

* On définit maintenant les <u>classes latérales</u> ("cosets" en anglais), il s'agit d'objets légèrement différents malgré le nom semblable.

<u>déf</u> Si G est un groupe et H un sous-groupe de G, en se donnant $g \in G$ on définit la classe latérale <u>gauche</u> gH l'ensemble des élément $g' = gh$ obtenus en multipliant à gauche par g tous les éléments de H.

La définition de la classe latérale <u>droite</u> Hg suit de manière évidente.

* Il est clair que si $g \in H$, $gH = Hg = H$. Par contre si $g \notin H$, alors $gH \cap H = \emptyset$ (de même pour Hg).
[En effet, s'il existe $h \in H$ tel que $gh = h' \in H$ alors on a que $g = h'h^{-1} \in H$ aussi.]

* On peut aussi montrer que ~~gH~~ $\dim gH = \dim H$ ou plus précisément tout élément de gH correspond à un seul élément de H [si $gh = g'$ et $gh' = g'$ alors $g'g^{-1} = h = h'$]. Donc ~~g~~ une classe latérale de H est en quelques sortes une "copie" de H. Elle n'est bien entendu <u>pas</u> un groupe car $e \notin gH \quad \forall g \notin H$.

* Si $g' \in gH$ alors $g'H = gH$ (évident).
  On peut donc choisir le représentant d'une classe latérale.

* On voit donc que si on se donne G et H, les classes latérales partitionnent G. Pour un groupe fini, ceci implique que $\dim H$ est un diviseur de $\dim G$.

* exemple : pour $G = S_3$ et $H = \{(abc), (bca), (cab)\}$ on a une classe latérale $(bac)H = H(bac) =$
  $= \{(bac), (cba), (acb)\}$.

* Pour les sous-groupes normaux, les classe latérales gauche et droite coïcident : $gHg^{-1} = H \Leftrightarrow gH = Hg \ \forall g$.

* On peut maintenant démontrer un théorème intéressant :

Th Si G est ~~un~~ groupe et H un sous groupe normal de G, alors l'ensemble des classes latérales gH de H est lui-même un groupe, appelé groupe quotient G/H.

* L'opération du groupe G/H est définie de la manière suivante : pour g_1 et $g_2 \in G$ ~~[illegible]~~, on a que $g_1H \cdot g_2H = g_1g_2 \cdot H$. Elle peut être définie sans ambiguïtés car H est normal et $g_{1,2}H = Hg_{1,2}$.

$$\Big[\, g_1H \cdot g_2H = \{ g_1h_1g_2h_2 \ \ \forall h_1, h_2 \in H \} \quad (\text{déf de } g_{1,2}H)$$
$$= \{ g_1g_2h_1'h_2 \ \ \forall h_1', h_2 \in H \} \quad (g_2H = Hg_2)$$
$$= \{ g_1g_2h \ \ \forall h \in H \} \quad (H \text{ est un groupe})$$
$$= g_1g_2H \quad (\text{déf de } g_1g_2H) \,\Big]$$

Cette opération est donc interne par construction, associative car G l'est. L'identité est H lui-même et $(gH)^{-1}$ est donné par $g^{-1}H$. G/H est donc un groupe.

- Exemple : pour $G = S_3$ et H comme avant, on a $G/H = \{ H, (bac)H \}$ qui est isomorphe au groupe à 2 éléments des permutations de 2 lettres $\{ (ab), (ba) \}$, isomorphe aussi à $\mathbb{Z}_2$.

* On a encore une définition :

<u>déf</u> Pour un groupe G, on appelle <u>centre</u> du groupe Z_G

l'ensemble de tous les éléments de G qui commutent avec chaque élément de G : $g \in Z_G$ si $\forall g' \in G$ $gg' = g'g$.

* On peut montrer que Z_G est un sous groupe normal de G :

sous groupe : trivial ; normal : trivial aussi.

Donc pour tout groupe G, on peut définir le groupe G/Z_G.

* On se donne maintenant une application $f : G \to G'$ qui est un homomorphisme. On va voir qu'on peut définir $G/\ker f$ et que de plus, ce groupe est isomorphe à $\mathrm{Im} f$.

* On montre d'abord que $\ker f$ est un sous groupe normal de G : ($k \in \ker f$ si $f(k) = e'$)

Sous groupe : . $f(e) = e'$ par définition de f.

. $\forall k_1, k_2 \in \ker f$ $f(k_1 k_2) = f(k_1) f(k_2) = e'e' = e'$

$\Rightarrow k_1 k_2 \in \ker f$

. $\forall k$ $f(k^{-1}) = f(k)^{-1} = e'^{-1} = e'$ $\Rightarrow k^{-1} \in \ker f$.

normal : $\forall h \in \ker f$, $\forall g \in G$

$f(ghg^{-1}) = f(g) f(h) f(g^{-1}) = f(g) e' f(g)^{-1} = e'$

$\Rightarrow ghg^{-1} \in \ker f$

* On considère maintenant l'application

$$\varphi : G/_{\ker f} \to \operatorname{Im} f$$
$$[g] \equiv g\ker f \to \varphi([g]) = f(g)$$

Il s'agit d'un homomorphisme car

$$\varphi([g_1][g_2]) = \varphi([g_1g_2]) = f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2) = \varphi([g_1])\varphi([g_2])$$

Il est clairement surjectif car ~~c'est~~ on est défini un élément $[g]$ $\forall g \in G$, on parcourt donc toutes les valeurs de $f(g)$ et donc tout élément de $\operatorname{Im} f$.

Le noyau de φ est identifié au noyau de f, il est donc donné par $\ker f$ qui est l'identité de $G/_{\ker f}$. φ est donc injectif, et donc bijectif : il s'agit d'un isomorphisme. On a donc :

$$G/_{\ker f} \simeq \operatorname{Im} f \, .$$

* On verra des applications de ce théorème concernant $SO(3)$ et $SU(2)$.

* Pour les groupes finis on a par exemple

$$\mathbb{Z}_{pq}/_{\mathbb{Z}_p} \simeq \mathbb{Z}_q \qquad \forall p,q \in \mathbb{N}$$

mais attention, $\mathbb{Z}_{pq} \simeq \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ uniquement si p et q mutuellement premiers !

3 Représentations de groupes

On a vu au chapitre précédent que les groupes, et leur propriétés, peuvent être étudiés de manière assez abstraite – c'est la puissance de la théorie des groupes ! On a aussi vu plusieurs exemples, parmi lesquels de groupes matriciels, qui sont peut être plus concrets (surtout pour des physicien(ne)s !). En fait on va à présent voir que tout ~~groupe~~ peut être représenté par un groupe matriciel, et de plusieurs façon différentes. Cela se fait naturellement en définissant des homomorphismes entre un groupe quelconque et un groupe matriciel. On a donc la définition suivante :

déf une représentation T du groupe G est un homomorphisme de G en $GL(V)$ le groupe des matrices inversibles agissant sur l'espace vectoriel V :

$$T : G \to GL(V) \quad : \quad g \to T(g)$$

V est généralement pris comme $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, on dit que T est une représentation de dimension n.

On a donc $T : G \to GL(n)$, ce qui sera toujours le cas dans la suite.

* T étant un homomorphisme, on a toutes les propriétés habituelles : $T(e) = \mathbb{1}_n \equiv$ la matrice $\underset{n\times n}{}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

$T(g_1 g_2) = T(g_1)\,T(g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in G$

$T(g^{-1}) = T(g)^{-1} \quad \forall g \in G$.

* Si $\ker T = \{e\}$, càd T est injectif, on parle de représentation fidèle.

* Si T associe $\mathbb{1}_n$ $\forall g$, on parle de représentation triviale

* Si G est un groupe de matrice lui-même, alors la représentation telle que $T(g) = g$ $\forall g$ est appelée identique.

* Deux représentation T et T' sont équivalentes s'il existe une matrice inversible S (càd une bijection) telle que

$$T'(g) = S^{-1}\,T(g)\,S \quad \forall g \in G$$

Pour que S^{-1} soit défini, S doit être une matrice carrée, donc T et T' définissent des représentations de même dimension. En fait, l'équivalence exprime le fait que les matrices $T(g)$ sont définies à un choix de base de V près ; S traduit donc un changement de base. On écrit $T \sim T'$.

* On aimerait résumer les propriétés d'une représentation indépendamment du choix de base. Comme on sait que les propriétés invariantes d'une matrice sont contenues dans ~~les~~ traces de ses puissances, on peut considérer $\mathrm{Tr}\, T(g)$ et varier g. On définit ainsi le <u>caractère</u> d'une représentation :

<u>déf</u> le caractère d'une représentation T de G est une application χ_T de G en $\mathbb{R}/\mathbb{C}$ qui associe à chaque élément g du groupe la valeur ~~Tr~~ $\chi_T(g) = \mathrm{Tr}\, T(g)$

* Clairement, si T et T' sont équivalentes,

$$\chi_{T'}(g) = \mathrm{Tr}\, T'(g) = \mathrm{Tr}\, S^{-1} T(g) S = \mathrm{Tr}\, T(g) = \chi_T(g) \quad \forall g.$$

donc χ caractérise une représentation aux équivalences près.

* Si deux éléments g et g' sont conjugués alors

$$\chi_T(g') = \chi_T(h g h^{-1}) = \mathrm{Tr}\, T(h) T(g) T(h)^{-1} = \mathrm{Tr}\, T(g) = \chi_T(g)$$

* Pour l'identité, le caractère donne la dimension de la représentation : $\chi_T(e) = \mathrm{Tr}\, \mathbb{1}_n = n$.

* Une représentation T est <u>unitaire</u> si $T(g)^{-1} = T(g)^{\dagger}\ \forall g$

Dans ce cas $\chi_T(g^{-1}) = \mathrm{Tr}\, T(g^{-1}) = \mathrm{Tr}\, T(g)^{-1} = \mathrm{Tr}\, T(g)^{\dagger} = \chi_T(g)^*$.

* On va à présent voir comment classer les représentations. L'idée c'est que si toutes les matrices $T(g)$ sont diagonales par blocs (les mêmes blocs), alors on peut deviner qu'elles sont composées de matrices liées à des représentations de dimension plus petite. On précise ces notions en parlant de sous-espaces invariants de V :

déf : M est un sous-espace invariant de V par rapport à la représentation T si $\forall g$, $T(g)M \in M$.

Bien entendu $\{0\}$ et V sont des sous-espace invariants $\forall T$. S'ils sont les seuls on dit que T est une représentation irréductible. Sinon elle est réductible en les représentations où l'on restreint les $T(g)$ à l'action dans M.

* Exemple : la représentation triviale $T(g) = \mathbb{1}_n$ $\forall g$ est réductible, sauf si $n=1$.

* Note : on distingue entre représentation réductibles (en général) et celles complètement réductibles (pour lesquelles $T(g)$ sont diagonales en blocs) — on ne rencontrera que ces dernières.

* Les <u>lemmes de Schur</u> nous permettent de trouver ~~...~~ d'autres quantités invariantes propres à chaque représentation. On a essentiellement un raisonnement en 2 étapes. D'abord on montre que si on a 2 représentations irréductibles T et T' qui sont mises en relation par

$$ST(g) = T'(g)S \quad \forall g$$

alors soit $S = 0$, soit $T \sim T'$ (donc $\det S \neq 0$).
À noter qu'a priori, T et T' peuvent avoir une dimension différente, et donc S être une matrice $n' \times n$.

* On se concentre d'abord sur $\mathrm{Im}\, S \subset V'$ l'espace où agit T'.
$\mathrm{Im}\, S$ est un sous espace invariant de V' : si $x' \in \mathrm{Im}\, S$ alors il $\exists x \in V$ t.q. $x' = Sx$; $T'(g)x' = T'(g)Sx$

$$= ST(g)x \in \mathrm{Im}\, S \quad \forall g$$

Comme T' est irréductible, soit $\mathrm{Im}\, S = \{0\}$, soit $\mathrm{Im}\, S = V'$. Si $\mathrm{Im}\, S = \{0\}$ alors $S = 0$ (premier cas).
Si $\mathrm{Im}\, S = V'$ on considère $\ker S \subset V$; $\ker S$ est un sous-espace invariant de V : si $x \in \ker S$ alors $Sx = 0$; or $ST(g)x = T'(g)Sx = T'(g)0 = 0$ donc $T(g)x \in \ker S \quad \forall g$.
Comme T est irréductible, alors soit $\ker S = \{0\}$ ou $\ker S = V$; si $\ker S = V$ alors $S = 0$ (premier cas à nouveau), si $\ker S = \{0\}$ alors S est une bijection entre V et V' et donc $T \sim T'$.

* On peut dès lors montrer un ces particulier ~~important~~, quand $T = T'$, et en tirer une conséquence importante : soit S un opérateur de V en V qui commute avec $T(g)$ $\forall g$:

$$ST(g) = T(g)S \quad \forall g$$

alors S est proportionnel à l'identité : $S = \lambda \mathbb{1}$.

* En effet prenons $S' = S - \lambda \mathbb{1}$ tel que $\det S' = 0$ (λ est une valeur propre, dans $\mathbb{C}$ éventuellement) alors $S'T(g) = T(g)S'$ $\forall g$, et comme $\det S' = 0$ alors $S' = 0$ donc $S = \lambda \mathbb{1}$.

* Donc en pratique si on identifie un opérateur qui commute avec tous les $T(g)$, son unique valeur propre est un invariant de T.

* Pour un groupe abélien, on a que $\forall g'$,

$$T(g')T(g) = T(g)T(g') \quad \forall g \quad \text{donc } T(g) = \lambda_g \mathbb{1} \quad \forall g$$

et donc toute représentation irréductible est de dimension 1. (car $\mathbb{1}_n$ est réductible si $n > 1$)

* À noter que si T n'est pas irréductible mais (complètement) réductible, alors il est facile de trouver $S \neq \lambda \mathbb{1}$ qui commute avec tout élément du $T(g)$:

$$T(g) = \begin{pmatrix} T_1(g) & 0 \\ 0 & T_2(g) \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \lambda_2 \mathbb{1} \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Donc si les seuls operateurs qui commutent avec tout $T(g)$ sont $\lambda \mathbb{1}$, T est irréductible.

* En général on écrit une représentation (complètement) réductible comme une <u>somme directe</u> de représentations irréductibles : Supposons T_i agissant sur V_i irréductibles, alors on définit T agissant sur $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_k$ comme la représentation données par les matrices

$$T(g) = \begin{pmatrix} T_1(g) & & & \\ & T_2(g) & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_k(g) \end{pmatrix} \quad \forall g$$

on l'écrit $T = T_1 \oplus T_2 \oplus \ldots \oplus T_k$.

* Une représentation unitaire est complètement réductible : soit V l'espace de la représentation et W un sous-espace invariant. On peut définir $W^\perp$ comme le sous-espace orthogonal à W dans V : ~~...~~
$y \in W^\perp$ si $x^\dagger y = 0 \quad \forall x \in W$.
Or W est invariant donc $T(g)x \in W \quad \forall g$ et $\forall x \in W$.
Qu'en est-il pour $y \in W^\perp$?

$$x^\dagger T(g) y = x^\dagger \left(T(g)^{-1}\right)^\dagger y \qquad \text{car } T \text{ est unitaire}$$

$$= x^\dagger T(g^{-1})^\dagger y = (T(g^{-1})x)^\dagger y = 0 \qquad \text{car } T(g^{-1})x \in W.$$

donc $T(g)y \in W^\perp$ et $W^\perp$ est invariant

$\rightarrow$ T est complètement réductible à $T(g)|_W \oplus T(g)|_{W^\perp}$.

* Pour une somme directe, les caractères deviennent

$$\chi_T(g) = \mathrm{tr}\, T(g) = \mathrm{tr}\, T_1(g) + \ldots + \mathrm{tr}\, T_k(g) = \chi_{T_1}(g) + \ldots + \chi_{T_k}(g).$$

* Considérons enfin le produit de représentations.
On part naturellement du produit tensoriel des espaces vectoriels : $V = V_1 \otimes V_2$ où donc $\dim V = \dim V_1 \cdot \dim V_2$

Si T_1 agit sur V_1 et T_2 sur V_2, on a que la représentation $T = T_1 \otimes T_2$ agit sur V.

* Pour y voir clair écrivons les composantes :
si T_1 agit sur V_1 comme $T_1(g)^i{}_j x_1^j$ et T_2 sur V_2 comme $T_2(g)^a{}_b x_2^b$ $(i,j = 1..n_1,\ a,b = 1..n_2)$
alors T agit sur V comme

$$T(g)^{ia}{}_{jb}\, x^{jb} \equiv T_1(g)^i{}_j\, T_2(g)^a{}_b\, x_1^j x_2^b$$

* On voit directement que

$$\big(T_1(g) \otimes T_2(g)\big) \cdot \big(T_1(g') \otimes T_2(g')\big) = \big(T_1(g) T_1(g')\big) \otimes \big(T_2(g) T_2(g')\big)$$

$$\big(T_1(g) \otimes T_2(g)\big)^\dagger = T_1(g)^\dagger \otimes T_2(g)^\dagger$$

et surtout

$$\mathrm{tr}\,\big(T_1(g) \otimes T_2(g)\big) = \mathrm{tr}\, T_1(g) \cdot \mathrm{tr}\, T_2(g)$$

qui impl. que

$$\chi_{T_1 \otimes T_2}(g) = \chi_{T_1}(g) \cdot \chi_{T_2}(g)$$

* Il est très important de noter qu'en général, si T_1 et T_2 sont des représentations irréductibles, $T = T_1 \otimes T_2$ peut être réductible ou pas. En fait, en général elle est réductible. On verra beaucoup d'exemples dans la suite.

* L'exception à cette règle est la suivante : si on considère un groupe qui est un produit direct de 2 groupes, $G = G_1 \times G_2$, on a clairement que chaque représentation irréductible de G_1 (et de G_2) l'est ~~une repr~~ aussi pour G : on a T_1 et T_2 de G définies par

$$T_1 : (g_1, g_2) \to T_1(g_1) \quad \text{sur } V_1$$

$$T_2 : (g_1, g_2) \to T_2(g_2) \quad \text{sur } V_2$$

On a ensuite que $T = T_1 \otimes T_2$ est définie par

$$T : (g_1, g_2) \to T_1(g_1) \otimes T_2(g_2) \quad \text{sur } V_1 \otimes V_2$$

On peut montrer assez facilement qu'elle est aussi irréductible.

4 Groupes continus et algèbres

* Quand les éléments du groupe dépendent de paramètres continus, on peut définir des trajectoires dans le groupe (qui définit en fait une variété) : $g(t)$ avec t un paramètre continu (choisi parmi une combinaison des $\dim G$ paramètres qui définissent le groupe). En particulier, on a la notion d'éléments infinitésimalement proches $g(t)$ et $g(t')$ avec $t' = t + \varepsilon$, $\varepsilon \to 0$. On va s'intéresser aux éléments proches de l'identité.

* On suppose donc qu'on a $g(t)$ tel que $g(0) = e$. On voudrait considérer des $g(t)$ avec t petit. Pour une fonction $f(t)$, on pense immédiatement à la série de Taylor $f(t) = f(0) + t f'(0) + \ldots$, càd l'approximation (au premier ordre) d'une fonction par sa tangente en $t=0$. Or pour un groupe abstrait il faut définir ce qu'est une somme d'éléments → pour un groupe matriciel, c'est juste la somme de matrices (en termes plus précis, la somme d'applications linéaires est bien définie).
On va donc considérer une représentation (quelconque) de G pour définir l'approximation de $g(t)$ en $t=0$.

* On définit donc $T(g(t))$ tel que $T(g(0)) = \mathbb{1}_M$ pour une représentation de dim M. Alors on a

$$T(g(t)) = \mathbb{1}_M + t \frac{d}{dt} T(g(t))\Big|_{t=0} + \dots$$

On appelle $\frac{d}{dt} T(g(t))\Big|_{t=0} \stackrel{*}{=} X_g$ et on va s'intéresser à cet objet. (On va oublier la référence à g et écrire $T(t) = \mathbb{1} + tX + \dots$)

* Un élément $T(t)$ qui satisfait trivialement la condition que sa dérivée première est donnée par X est le suivant : $T(t) = e^{tX}$ où la fonction exp est définie sur les matrices par sa série de Taylor : $e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n$ avec X matrice $M \times M$, $X^0 = \mathbb{1}_M$.

* La question se pose de ~~que~~ comment définir l'ensemble des matrices X, en d'autres termes quelles propriétés a l'espace ~~est~~ auquel elles appartiennent. C'est un espace vectoriel car on a vu qu'il faut pouvoir additionner les matrices X. Mais on doit veiller à ce que la loi de groupe soit respectée.

* La loi de groupe stipule $g_1 g_2 \in G$, ce qui pour une représentation se traduit en $T(g_1)T(g_2) = T(g_1 g_2)$

Donc si $T(g_1)$ et $T(g_2)$ peuvent être écrites, respectivement, comme e^{X_1} et e^{X_2} (on ~~est~~ oublie le paramètre t en prenant X_i petits ...), alors leur produit doit pouvoir s'écrire comme une exponentielle simple :

$$e^{X_1} e^{X_2} = e^{X_{12}}$$

* La formule de Baker-Campbell-Hausdorff nous permet d'obtenir X_{12} à partir de X_1 et X_2 :

$$X_{12} = X_1 + X_2 + \frac{1}{2}[X_1, X_2] + \dots$$

↳ tous les termes successifs sont des commutateurs multiples.

($[X_1, X_2] = X_1 X_2 - X_2 X_1$ bien entendu.)

Donc si $X_1, X_2 \in V$ un espace vectoriel, il faut s'assurer que $[X_1, X_2] \in V$ aussi, pour que la loi de groupe soit vérifiée. Un espace vectoriel muni de la structure additionnelle du <u>crochet</u> $[\,,\,]$ est appelé une <u>algèbre</u>.

* Maintenant qu'on a essayé d'introduire intuitivement la notion d'algèbre et de son crochet, on peut en donner une définition abstraite.

* **déf** Une algèbre (de Lie) A est un espace vectoriel muni d'une opération appelée crochet $[\,,\,]$

$$[\,,\,] : A\times A \to A \quad : (x,y) \to [x,y]$$

qui a les propriétés suivantes

- linéaire $\quad [x, a_1y_1 + a_2y_2] = a_1[x,y_1] + a_2[x,y_2]$

$$\forall x, y_1, y_2 \in A \quad , \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$$

- antisymétrique : $\quad [x,y] = -[y,x] \quad \forall x,y \in A$
- satisfait l'identité de Jacobi :

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0 \quad \forall x,y,z \in A.$$

* Ces trois propriétés sont calquées sur les propriétés du commutateur de matrices, qui les satisfait trivialement. Mais bien entendu en abstraction on peut penser au crochet sans faire référence au commutateur (en pratique, on les identifiera).

* Une algèbre est abélienne si $[x,y] = 0 \quad \forall x,y \in A$.
Notons immédiatement qu'il en suit que $e^x e^y = e^y e^x$ donc les algèbres abéliennes sont liées aux groupes abéliens.

* Voyons aussi la relation entre groupe et algèbre pour d'autres groupes continus qu'on a rencontré :

- ~~groupe~~ groupe unitaire $U(n)$: ses matrices satisfont $M^{-1} = M^{+}$; or si $M = e^{X}$ on a $M^{-1} = e^{-X}$ et $M^{+} = e^{X^{+}}$ et donc $X = -X^{+}$: l'algèbre $u(n)$ est composée des matrices anti-hermitiennes
  $\rightarrow \dim u(n) = n^2$.

- groupe ~~symplectique~~ orthogonal $O(n)$:
  $M^{-1} = M^{T}$, $M = e^{X} \rightarrow M^{-1} = e^{-X}$ $M^{T} = e^{X^{T}}$
  $\rightarrow X^{T} = -X$ $\rightarrow$ algèbre de $O(n)$ est composée des matrices antisymétriques $\rightarrow \dim o(n) = \frac{n(n-1)}{2}$.

- groupe $SL(n)$: $\det M = 1$
  $\rightarrow \det e^{X} = e^{\operatorname{tr} X} = 1 \iff \operatorname{tr} X = 0$.

* On voit de manière générale que le calcul de propriétés est plus facile dans l'algèbre que dans le groupe.

* Comme une algèbre est un espace vectoriel, on peut définir une base t_i de A, $i = 1 \ldots \dim A$. Le fait que ~~$[t_i, t_j]$~~ $[x, y] \in A$ $\forall x, y \in A$, implique que $[t_i, t_j]$ doit pouvoir être écrit comme une combinaison linéaire des t_i eux-mêmes.

On a donc $[t_i, t_j] = c_{ij}^{\,k} t_k$ avec le $c_{ij}^{\,k}$ les <u>constantes de structure</u> de l'algèbre A.

* Les constantes de structure satisfont l'antisymétrie $c_{ij}^{\,k} = - c_{ji}^{\,k}$ et les identités de Jacobi

$$c_{ij}^{\,l} c_{kl}^{\,m} + c_{ki}^{\,l} c_{jl}^{\,m} + c_{jk}^{\,l} c_{il}^{\,m} = 0$$

Malheureusement, les constantes de structure dépendent de la base $\{t_i\}$ de A et donc ne sont pas un invariant de A. (Voir le cours de MA1 pour trouver les données minimales pouvant caractériser complètement une algèbre de Lie, et portant à une classification complète.)

* Comme pour les groupes, on peut définir des isomorphismes entre algèbres : $f : A \to A'$ tel que

$$f([x,y]) = [f(x), f(y)]$$

(f est une application linéaire : $f(ax+by) = a f(x) + b f(y)$)

isomorphisme si f bijective.

Attention : si deux groupes sont isomorphes, leur 2 algèbres le sont aussi, mais le contraire n'est pas vrai. En effet l'algèbre "sonde" uniquement la partie du groupe proche de l'identité. Or un groupe continu

Peut avoir plus d'un partie connexe. On verra ~~...~~ des exemples !

* Une sous-algèbre B de A est un sous-espace de A tel que le crochet est interne à B, càd B est ~~de soi~~ elle même une algèbre.

* On peut définir la somme directe d'algèbres de Lie, comme pour les espaces vectoriels : si A_1 et A_2 sont des algèbres, on définit $A_1 \oplus A_2$ ~~de ...~~ munie du crochet suivant : si $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$, $(x_1, x_2) \in A_1 \oplus A_2$ et de même pour y_1, y_2 on a

$$[(x_1,x_2),(y_1,y_2)] = ([x_1,x_2],[y_1,y_2])$$

A_1 et A_2 sont des sous-algèbres de $A_1 \oplus A_2$, et elles commutent : $[(x_1, 0), (0, y_2)] = ([x_1, 0], [0, y_2]) = (0,0)$

* Si on écrit $x \equiv (x, 0)$ $\forall x \in A_1$ et $y \equiv (0, y)$ $\forall y \in A_2$ on a qu'un élément de $A_1 \oplus A_2$ peut s'écrire en toute généralité $x+y$.

Or si on passe en groupe on a $e^{x+y} = e^x e^y$ car $[x,y]$ et donc vu que $e^x \in G_1$, $e^y \in G_2$ avec G_1 et G_2 des groupes qui ont A_1 et A_2 comme algèbres respectives, on a que le groupe relatif à $A_1 \oplus A_2$ est $G_1 \times G_2$.

→ à un produit direct de groupes correspond une somme d'algèbres.

* Représentations d'une algèbre : comme pour un groupe, on peut représenter une algèbre dans un espace vectoriel V (autre que celui qu'on a utilisé pour définir ~~une~~ l'algèbre) si son crochet est bien défini. A chaque élément de A on associe un élément de $gl(V)$ (toutes les matrices agissant sur V, pas nécessairement inversibles).

On a donc pour la représentation r :

$$r : A \to gl(V) \quad : x \to r(x)$$

où r est une application linéaire :

$$r(ax+by) = a\, r(x) + b\, r(y)$$

qui respecte le crochet :

$$r([x,y]) = [r(x), r(y)]$$

où $[r(x), r(y)]$ est le commutateur de matrices de $gl(V)$.

* Il y a bien sûr un lien entre les représentations d'un groupe G et celles de son algèbre A. Soit T une représentation de G. ~~et associons à tout élément $g \in G$ un élément $x \in A$ par l'exponentielle $g = e^{tx}$~~

$\forall g \in G$ on écrit $T(g) = e^{\cancel{t}\, r_T(x)}$ (g connexe à e !)

r_T, la représentation de A associée à T, est définie ainsi. Notons en particulier que $T(g)$ et $r_T(x)$ agissent sur le même espace vectoriel V, de même dimension n, et que on a bien $r_T \in gl(n)$ alors que $T(g) \in GL(n)$ ($e^{r_T(x)}$ est toujours inversible).

Essentiellement, on a déjà montré la loi de groupe, satisfaite par la représentation T, implique que $r_T(x)$ définit une algèbre. Ellemest donc une représentation.

* À une représentation unitaire de G, $T(g)^{-1} = T(g)^{\dagger}\ \forall g$, est associée une représentation r de A telle que $r(x)^{\dagger} = -r(x) \quad \forall x \in A$.

* Les identités de Jacobi impliquent que l'algèbre elle-même fournit l'espace vectoriel pour une représentation, appelée <u>représentation adjointe</u>, avec donc $\dim ad = \dim A$.

$ad : A \to gl(A) : x \to ad(x)$

l'application $ad(x)$ agit de la manière suivante :

$ad(x) : A \to A : y \to ad(x)y = [x, y]$.

Voyons qu'il s'agit bien d'une représentation :

$$
\begin{aligned}
ad([x,y])z &= [[x,y],z] = -[z,[x,y]] \\
&= [x,[y,z]] - [y,[x,z]] \qquad \text{(Jacobi)} \\
&= ad(x)\,ad(y)z - ad(y)\,ad(x)z \\
&= [ad(x), ad(y)]z
\end{aligned}
$$

* Si on prend la base t_i de A, on a

$$ad(t_i)t_j = [t_i, t_j] = c_{ij}{}^k t_k$$ et donc, ~~on~~ on peut écrire les éléments des ~~dim~~ $\dim A$ matrices $\dim A \times \dim A$

$$ad(t_i)_j{}^k = c_{ij}{}^k \quad \rightarrow \text{ c'est les constantes de structure.}$$

* En passant au groupe, on peut voir :

$$(\mathbb{1} + ad(X) + ..) Y = Y + XY - YX + . = (1 + X + ..) Y (1 - X + ..)$$
$$= e^X Y e^{-X}$$

donc à un élément $g \equiv e^X \in G$ on associe l'application linéaire ~~dans~~ sur A

$$Ad(g) Y = e^X Y e^{-X}$$

on peut facilement voir qu'il s'agit d'une représentation :

$$\left(g_1 g_2 \in G \leftrightarrow e^{X_1} e^{X_2} \equiv e^{X_{12}} \right)$$

$$Ad(g_1 g_2) Y = e^{X_{12}} Y e^{-X_{12}} = e^{X_1} e^{X_2} Y e^{-X_2} e^{-X_1}$$
$$= Ad(g_1) e^{X_2} Y e^{-X_2} = Ad(g_1) Ad(g_2) Y.$$

On l'appelle aussi représentation adjointe (du groupe).

* Considérons pour finir le produit tensoriel de représentations : $T = T_1 \otimes T_2$. L'espace de la représentation du groupe est $\dim V_1 \cdot \dim V_2$, ainsi il en est pour la représentation de l'algèbre.

On on peut écrire $T_1 = \mathbb{1}_{M_1} + \pi_1 + \ldots$, $T_2 = \mathbb{1}_{M_2} + \pi_2 + \ldots$

où $M_{1,2} = \dim V_{1,2}$. Donc

$$
\begin{aligned}
T = T_1 \otimes T_2 &= (\mathbb{1}_{M_1} + \pi_1 + \ldots) \otimes (\mathbb{1}_{M_2} + \pi_2 + \ldots) \\
&= \mathbb{1}_{M_1} \otimes \mathbb{1}_{M_2} + \pi_1 \otimes \mathbb{1}_{M_2} + \mathbb{1}_{M_1} \otimes \pi_2 + \ldots \\
&\equiv \mathbb{1}_{M_1 M_2} + \pi + \ldots
\end{aligned}
$$

et donc on a $\pi = \pi_1 \otimes \mathbb{1}_{M_2} + \mathbb{1}_{M_1} \otimes \pi_2$

ce qui est attendu vu que π est une application linéaire en x (l'argument de π).

- En guise de prologue à la discussion du groupe des rotations, on va démontrer d'emblée l'isomorphisme entre les algèbres de $SO(3)$ et $SU(2)$.

- On commence par l'algèbre de $SO(3)$, ~~constituée~~, constituée des matrices 3×3 antisymétriques $X^T = -X$. Elle est de dimension 3, on va donc écrire 3 générateurs :

$$
T_1 = \begin{bmatrix} & & \\ & & -1 \\ & 1 & \end{bmatrix} \quad T_2 = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & & \\ -1 & & \end{bmatrix} \quad T_3 = \begin{bmatrix} & -1 & \\ 1 & & \\ & & \end{bmatrix}
$$

* Il est facile de se convaincre qu'une façon compacte d'écrire les éléments des matrices composant la base est

$(T_i)_{mn} = -\varepsilon_{imn}$ avec $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{[ijk]} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ikj}$
et $\varepsilon_{123} = 1$
(tenseur de Levi-Civita à 3d)

(on vérifie $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$, $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk} = 2\delta_{il}$, $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$)

* Pour calculer les relations de commutation on écrit :

$$
\begin{aligned}
[T_i, T_j]_{mn} &= (T_i)_{mp}(T_j)_{pn} - (T_j)_{mp}(T_i)_{pn} \\
&= \varepsilon_{imp}\varepsilon_{jpn} - \varepsilon_{jmp}\varepsilon_{ipn} \\
&= -\varepsilon_{imp}\varepsilon_{jnp} + \varepsilon_{inp}\varepsilon_{jmp} \\
&= -(\cancel{\delta_{ij}\delta_{mn}} - \delta_{in}\delta_{jm}) + (\cancel{\delta_{ij}\delta_{mn}} - \delta_{im}\delta_{jn}) \\
&= -(\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}) \\
&= -\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk} \\
&= \cancel{+}\,\varepsilon_{ijk}(-\varepsilon_{kmn}) \\
&= \varepsilon_{ijk}(T_k)_{mn}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ on a donc $[T_i, T_j] = \varepsilon_{ijk} T_k$

les constantes de structure de so(3) sont $c_{ij}^{\ k} = \varepsilon_{ijk}$.

* L'algèbre de $su(2)$ quant à elle, elle est constituée des matrices 2×2 antihermitiennes : $X^\dagger = -X$

Elle est aussi de dimension 3, une telle matrice peut être paramétrisée par

$$X = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} ix_3 & x_2+ix_1 \\ -x_2+ix_1 & -ix_3 \end{bmatrix} = -\frac{i}{2}(x_1\tau_1 + x_2\tau_2 + x_3\tau_3)$$

avec $\tau_1 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$ $\tau_2 = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}$ et $\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$

les matrices de Pauli, qui vérifient

$[\tau_i, \tau_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\tau_k$ (elle sont hermitiennes!)

* On prend donc les générateurs de $su(2)$

$t_i = -\frac{i}{2}\tau_i$ et on trouve aisément

$[t_i, t_j] = -\frac{1}{4}[\tau_i, \tau_j] = -\frac{i}{2}\varepsilon_{ijk}\tau_k = \varepsilon_{ijk}t_k$

$\rightarrow$ les constantes de structure de $su(2)$ sont aussi

$c_{ij}{}^k = \varepsilon_{ijk}$

* L'isomorphisme entre $so(3)$ et $su(2)$ est trivial :
$f: so(3) \rightarrow su(2)$: $X = x_i T_i \rightarrow f(X) = x_i t_i$.

* Maintenant qu'on a établi un lien entre $so(3)$ et $su(2)$, on va voir que le lien entre $SO(3)$ et $SU(2)$ a des subtilités supplémentaires.

5 Le groupe des rotations : O(3) et SO(3)

* On va s'intéresser donc aux transformations de l'espace euclidien à 3 dimensions, en d'autres termes les transformations de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ qui préservent la norme euclidienne donnée par le produit scalaire : si $x, y \in \mathbb{R}^3$ $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ on dénote les composantes de x et y par x_i, y_i $i=1,2,3$ le produit scalaire est $x^T y \equiv x_i y_i$.

* Une transformation M préserve la norme si

$M^T M = \mathbb{1}_3$ ce qui implique $M^T = M^{-1}$ et donc $M M^T = \mathbb{1}_3$ aussi.

M est en effet inversible car $M^T M = \mathbb{1}_3 \Rightarrow (\det M)^2 = 1$ et donc $\det M \neq 0$.

* M agit sur des vecteurs à 3 composantes, elle est donc une matrice 3×3, et elle appartient à $O(3)$.

* Comme $(\det M)^2 = 1$, on a soit $\det M = 1$, ce qui spécifie le sous-groupe $SO(3)$, soit $\det M = -1$.

* Si e_i sont les 3 vecteurs de base de $\mathbb{R}^3$, on voit que $e_i^T \cdot e_j = \delta_{ij}$ implique que $(Me_i)^T Me_j = e_i^T M^T M e_j$
$= e_i^T e_j = \delta_{ij}$

donc $\{Me_i\}$ définit aussi 3 vecteurs orthonormés si $M \in O(3)$.

=> les colonnes de M définissent une nouvelle base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Elle préserve l'orientation si $\det M = 1$, elle la renverse si $\det M = -1$.

* Des exemples :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det M = -1$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det M = 1$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \det M = 1$$

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det M = -1$$

$$M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \qquad \det M = \pm 1$$

* On va à présent déterminer le centre de $O(3)$ et de $SO(3)$. On recherche toutes les matrices $Z \in O(3)$ qui commutent avec tout élément de $O(3)$ (la restriction à $SO(3)$ est directe).

* Soit Z une matrice 3×3. Si elle commute avec $\Pi = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ elle doit satisfaire à ce qui suit :

$$Z = \begin{pmatrix} a & b_\beta \\ c_\alpha & d_{\alpha\beta} \end{pmatrix}, \quad \Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\delta_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \qquad \beta, \alpha = 2,3$$

$$Z\Pi = \begin{pmatrix} a & -b_\beta \\ c_\alpha & -d_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \qquad \Pi Z = \begin{pmatrix} a & b_\beta \\ -c_\alpha & -d_{\alpha\beta} \end{pmatrix}$$

$$Z\Pi = \Pi Z \iff b_\alpha = 0 = c_\alpha$$

- De même, si Z doit commuter avec $\Pi = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ on obtient que Z doit être diagonale $Z = \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix}$

- Z doit commuter aussi avec $\Pi = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$Z\Pi = \begin{pmatrix} a\cos\alpha & a\sin\alpha & 0 \\ -b\sin\alpha & b\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Pi Z = \begin{pmatrix} a\cos\alpha & b\sin\alpha & 0 \\ -a\sin\alpha & b\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Z\Pi = \Pi Z \iff a = b$$

- De même, si Z doit commuter avec

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$, alors $b=c$ aussi.

- On obtient donc que $Z = a \mathbb{1}_3$; à noter qu'on est arrivés à ce résultat en utilisant uniquement des éléments de $SO(3) \subset O(3)$.

- On impose maintenant $ZZ^T = \mathbb{1}_3 \Leftrightarrow a^2 = 1$

  → on a donc 2 possibilités : $Z_1 = \mathbb{1}_3$ et $Z_2 = -\mathbb{1}_3$
  Z_1 est l'identité qui fait toujours partie du centre.
- On ~~[illegible]~~ det $Z_2 = -1$, donc $Z_2 \in O(3)$ mais $Z_2 \notin SO(3)$.

- On a donc déterminé que

$$Z(O(3)) = \{\mathbb{1}_3, -\mathbb{1}_3\} \simeq \mathbb{Z}_2$$

$$Z(SO(3)) = \{\mathbb{1}_3\} \simeq \text{trivial}.$$

- Appelons $P = -\mathbb{1}_3$ l'autre élément de $Z(O(3))$ à part l'identité. On va maintenant montrer que $O(3) \simeq SO(3) \times \mathbb{Z}_2$.

  On définit l'homomorphisme

$$\begin{aligned} \rho : SO(3) \times \mathbb{Z}_2 &\to O(3) \\ (M, A) &\to N = MA \end{aligned}$$

où donc $M \in SO(3)$, $A \in \{\mathbb{1}_3, P\}$

et donc $N = MA$ est bien défini.

- On montre d'abord que $\mathrm{Im} f = O(3)$ car $\forall N \in O(3)$, si $\det N = 1$ alors l'élément $(N, \mathbb{1}_3)$ de $SO(3) \times \mathbb{Z}_2$ est envoyé sur N ; si $\det N = -1$ alors l'élément (NP, P) est envoyé sur N car ; en effet $P^2 = \mathbb{1}$ donc $NP \cdot P = N$ et $\det NP = (-1)^2 = 1$ donc $NP \in SO(3)$
$(NP)^T NP = P^T N^T N P = P^2 = \mathbb{1}$.

- Ensuite on détermine $\ker f$: (M, A) tels que $MA = \mathbb{1}$. On $\det M \cdot \det A = 1$ $\Rightarrow$ $\det M = 1 \Rightarrow \det A = 1$ $\Rightarrow A = \mathbb{1} \Rightarrow M = \mathbb{1}$

Donc $\ker f = \{(\mathbb{1}_3, \mathbb{1}_3)\} \equiv$ l'identité de $SO(3) \times \mathbb{Z}_2$.

- f est donc bijectif et est un isomorphisme :

$$SO(3) \times \mathbb{Z}_2 \simeq O(3).$$

* Il en découle que $SO(3)$ et $\mathbb{Z}_2$ sont des sous groupes normaux de $O(3)$, et donc aussi que $SO(3) \simeq \dfrac{O(3)}{\mathbb{Z}_2}$ et $\mathbb{Z}_2 \simeq \dfrac{O(3)}{SO(3)}$

* $O(3)$ a donc des éléments connexes à l'identité, ceux pour qui $\det \Pi = 1$, et des élément qui ne le sont pas, ceux qui ont $\det \Pi = -1$.

* un élément g d'un groupe continu est connexe à l'identité e s'il existe une famille continue d'éléments $g(t)$ avec $t \in [0,1]$ telle que $g(0) = e$, $g(1) = g$ et $g(t) \in G \ \forall t$

* Appelons l'ensemble des éléments connexes à l'identité G_0. C'est un sous groupe, en effet $e \in G_0$; si g_1 et $g_2 \in G_0$, alors $g_1 g_2 \in G_0$ car $g_1(t) g_2(t) \in G$ $\forall t$; $g_1^{-1} \in G_0$ car $g_1(t)^{-1} \in G \ \forall t$.

C'est un sous groupe normal car si $g \in G_0$ et $g' \in G$ alors $g' g g'^{-1}$ est connexe à l'identité : la famille continue $g' g(t) g'^{-1}$ est telle que $g' g(1) g'^{-1} = g' g g'^{-1}$, $g' g(0) g'^{-1} = g' g'^{-1} = e$ et bien entendu $g' g(t) g'^{-1} \in G \ \forall t$. Donc $g' G_0 g'^{-1} \in G_0 \ \forall g' \in G$

* les classes latérales de G_0 sont des "copies" de G_0, connexes à l'élément qui les définit.

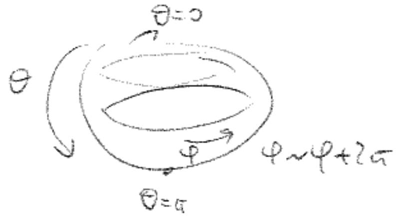
* Pour $O(3)$, on a donc le sous groupe connexe à l'identité qui est $SO(3)$, et une classe latérale qui est $PSO(3)$, les éléments de $O(3)$ connexes à P.

* Attention : on verra pour $SU(2)$ que le centre ne définit pas nécessairement des éléments non connexes à l'identité. $O(3)$ a une structure très simple de ce point de vue là !

* On va maintenant discuter des paramétrisations de $O(3)$ et de $SO(3)$. Concentrons nous d'abord sur $SO(3)$, la composante connexe à l'identité ou, de façon équivalente, le groupe des transformations qui préservent l'orientation ("rotations propres").

* On détermine complètement une rotation de la façon suivante : on spécifie tout d'abord l'axe de rotation ; cela se fait en spécifiant 2 angles θ et φ, ou en d'autres termes un point sur la sphère unité S^2. Ensuite on spécifie l'angle α qui détermine l'entité de la rotation autour de cet axe. On a bien 3 paramètres.

* On spécifie univoquement un point sur S^2 avec $\theta \in [0,\pi)$ et $\varphi \in [0,2\pi)$



- Une fois qu'on a spécifié l'axe, on a que $\alpha \in [0,\pi)$ car une rotation dans l'autre sens est obtenue en choisissant l'axe pointant dans la direction opposée ($\theta \to \pi-\theta$, $\varphi \to \varphi+\pi \mod 2\pi$)

- attention car pour $\alpha=\pi$ les directions opposées définissent la même rotation.

- On en déduit que $SO(3)$ est paramétrisé par la boule de rayon π avec ~~ptt~~ points antipodaux du bord identifiés. Ce n'est manifestement pas un espace simplement connexe !

* Plus pragmatiquement, si on se donne un axe, on peut le choisir le long de l'axe x_3. La matrice aura la forme suivante, pour une rotation d'angle α

$$\Pi = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On note que $\operatorname{tr}\Pi = 1+2\cos\alpha$ et que les valeurs propres de Π sont 1, $e^{i\alpha}$ et $e^{-i\alpha}$.

* En fait toute matrice réelle Π a 3 valeurs propres, 1 réelle et les 2 autres soit réelles soit complexes conjuguées (l'équation caractéristique est cubique à coefficients réels). À noter que si les valeurs propres coïncident, les matrices triangulaires sont exclues par $\Pi^T\Pi=\mathbb{1}$. On peut donc diagonaliser la matrice, par une transformation unitaire si les valeurs propres sont complexes. En effet Π peut être considérée unitaire puisque si $\Pi\in\mathbb{R}$ et $\Pi^T\Pi=\mathbb{1}$, alors $\Pi^\dagger\Pi=\mathbb{1}$ aussi. $\Pi^\dagger\Pi=\mathbb{1}$ pour Π diagonale impose $|\lambda|^2=1$ pour toute valeur propre. La valeur propre réelle vaut donc ±1, les complexes $e^{\pm i\alpha}$. $\det\Pi=1$ si la valeur propre réelle vaut $+1$. La matrice explicitée au point précédent est obtenue en prenant l'espace propre de la valeur propre $+1$ le long de x_3 et en reconnaissant que α détermine l'angle de la rotation.

* Considérons une dernière paramétrisation, en partant de l'algèbre. Un élément de $so(3)$ s'écrit $x=\alpha_i T_i$; en choisissant $\alpha_i=(0,0,\alpha)$ on peut exponentier x pour obtenir $\Pi=e^x=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}x^m$

* On $X = \alpha T_3$ et $T_3 = \begin{bmatrix} & -1 & \\ 1 & & \\ & & \end{bmatrix}$ $\quad T_3^2 = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$

$T_3^3 = -T_3 \quad T_3^4 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$

Donc $$M = \mathbb{1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} (-1)^n T_3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!} \begin{bmatrix} (-1)^n & & \\ & (-1)^n & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & -\sin\alpha & \\ \sin\alpha & & \\ & & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha - 1 & & \\ & \cos\alpha - 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & \\ \sin\alpha & \cos\alpha & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

→ à nouveau une matrice pour une rotation d'angle α autour de l'axe x_3.

⑥ Les groupes U(2) et SU(2)

* Vu le lien entre les algèbre so(3) et su(2), on s'attèle maintenant à la description des groupes U(2) et SU(2), dans la perspective d'établir le lien précis entre SU(2) et le groupe des rotations.

* Le groupe U(2) est le groupe des matrices agissant sur l'espace vectoriel $\mathbb{C}^2$ et qui préservent la norme hermitienne : $x, y \in \mathbb{C}^2$ $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$
la norme est donnée par $x^\dagger y \equiv x^*_\alpha y_\alpha$ $\alpha = 1, 2$.

* On a donc pour $M \in U(2)$ matrice 2×2 aux éléments complexes, qu'elle doit satisfaire

$$M^\dagger M = \mathbb{1}_2 \Leftrightarrow M^\dagger = M^{-1} \Leftrightarrow M M^\dagger = \mathbb{1}_2 .$$

On a que $|\det M|^2 = 1$ (et donc $\det M \neq 0$).

* On peut imposer $\det M = 1$, on définit alors SU(2), sous groupe de U(2), normal.
Contrairement à SO(3) dans O(3), SU(2) a une infinité continue de classes latérales dans U(2).

* Par exemple :

$$M = \begin{bmatrix} e^{i\varphi_1} & \\ & e^{i\varphi_2} \end{bmatrix} \in U(2) \ \forall \varphi_1, \varphi_2, \quad \in SU(2) \text{ si } \varphi_2 = -\varphi_1$$

$$M = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \in SO(2) \subset SU(2) \subset U(2).$$

* On va déterminer le centre de $U(2)$ et $SU(2)$.
On va d'abord demander que $Z = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ commute avec

$$M = \begin{bmatrix} e^{i\varphi} & \\ & e^{-i\varphi} \end{bmatrix} \quad \forall \varphi$$

$$ZM = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\varphi} & \\ & e^{-i\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a e^{i\varphi} & b e^{-i\varphi} \\ c e^{i\varphi} & d e^{-i\varphi} \end{bmatrix}$$

$$MZ = \begin{bmatrix} a e^{i\varphi} & b e^{i\varphi} \\ c e^{-i\varphi} & d e^{-i\varphi} \end{bmatrix} \quad \rightarrow ZM = MZ \ \forall \varphi \iff b = 0 = c$$

• on a donc $Z = \begin{bmatrix} a & \\ & d \end{bmatrix}$, on prend à présent $M = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

$$ZM = \begin{bmatrix} a\cos\theta & a\sin\theta \\ -d\sin\theta & d\cos\theta \end{bmatrix} \qquad MZ = \begin{bmatrix} a\cos\theta & d\sin\theta \\ -a\sin\theta & d\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow ZM = MZ \ \forall \theta \iff a = d$$

* On a donc $Z = a\,\mathbb{1}_2$, $Z^\dagger Z = \mathbb{1}_2 \iff |a|^2 = 1$

et on a pour finir $Z(U(2)) = \{ e^{i\gamma} \mathbb{1}_2 \} \simeq U(1)$

* On a utilisé que les matrices M dans $SU(2) \subset U(2)$ donc pour $SU(2)$ aussi $Z = a \mathbb{1}_2$ mais en plus

$\det Z = 1 \quad \leftrightarrow \quad a^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \pm 1$.

on a donc $\quad Z(SU(2)) = \{\mathbb{1}_2, -\mathbb{1}_2\} \simeq \mathbb{Z}_2$.

* On va préciser le lien entre $U(2)$ et $SU(2)$. Il est clair que $U(2)$ doit être lié à $SU(2) \times U(1)$.
En effet considérons $f : U(2) \to G : M \to \det M$
Comme $|\det M|^2 = 1$ $\to$ $\det M = e^{i\alpha}$ et on identifie $G = U(1) = \mathrm{Im}\, f$

le noyau de f est $\ker f = \{M \text{ t.q. } \det M = 1\} = SU(2)$

Donc par le théorème qui donne l'isomorphisme

$\frac{G}{\ker f} \simeq \mathrm{Im}\, f$, on a que $\frac{U(2)}{SU(2)} \simeq U(1)$

* Définissons donc $f : SU(2) \times U(1) \to U(2)$

$$(M, e^{i\alpha}) \to N = e^{i\alpha} M.$$

C'est clair que $\mathrm{Im}\, f = U(2)$: $\forall N \in U(2)$ avec $\det N = e^{i\alpha}$

on prend $\left(N e^{-i\frac{\alpha}{2}}, e^{i\frac{\alpha}{2}}\right) \in SU(2) \times U(1)$ car

$\det N e^{-i\frac{\alpha}{2}} = e^{i\alpha} e^{-i\alpha} = 1$.

· $\ker f = \{(M, e^{i\gamma}) \text{ t.q. } M e^{i\gamma} = \mathbb{1}_2\}$

$M = e^{-i\gamma}\mathbb{1}_2$ avec $\det M = 1$ $\to$ $M = \pm\mathbb{1}_2$ $e^{i\gamma} = \pm 1$

$\to \ker f = \{(\mathbb{1}, 1), (-\mathbb{1}, -1)\} \simeq \mathbb{Z}_2$.

attention : $\ker f \neq Z(SU(2))$ car l'élément de $U(1)$ est corrélé à l'élément de $Z(SU(2))$.

· On a donc $U(2) \simeq \dfrac{SU(2)\times U(1)}{\mathbb{Z}_2}$

* La structure qu'on vient de voir suggère que $U(2)$ n'a pas de morceaux qui ne sont pas connexes à l'identité.

En effet le fait de pouvoir écrire tout élément de $U(2)$ comme $e^{i\gamma}M$ avec $M \in SU(2)$ montre tout élément de $U(2)$ est connexe à un élément de $SU(2)$: il suffit de prendre $\gamma(t) = \gamma t$, $t \in [0,1]$.

* Tout élément de $SU(2)$ peut être diagonalisé, pour obtenir $M = \begin{bmatrix} e^{i\alpha} & \\ & e^{-i\alpha} \end{bmatrix}$. Un tel élément est manifestement connexe à l'identité : $\alpha(t) = \alpha t$.

(À noter que $M = -\mathbb{1} \in Z(SU(2))$ est aussi connexe à l'identité !)

* Enfin trouvons une paramétrisation de $SU(2)$.

On prends $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ et on impose $MM^\dagger = \mathbb{1}_2$, $\det M = 1$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{array}{l} |a|^2+|b|^2=1 \\ |c|^2+|d|^2=1 \\ ac^*+bd^*=0 \end{array}$$

$$\det M = 1 \quad \leftrightarrow \quad ad-bc=1$$

a priori 6 equations réelles pour 8 variables réelles.

$$0=(ac^*+bd^*)d = adc^* + b|d|^2 = (1+bc)c^* + b|d|^2$$
$$= c^* + b|c|^2 + b|d|^2 = c^* + b(|c|^2+|d|^2) = c^*+b \quad \Rightarrow \quad c=-b^*$$

$$0=(ac^*+bd^*)c = a|c|^2 + bcd^* = a|c|^2 + (ad-1)d^*$$
$$= a|c|^2 + a|d|^2 - d^* = a(|c|^2+|d|^2) - d^* = a - d^* \quad \Rightarrow \quad d=a^*$$

* On a donc $M = \begin{bmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{bmatrix}$ avec $|a|^2+|b|^2=1$

pour finir on a 4 variables réelles avec 1 équation
$\rightarrow$ 3 paramètres.

* En fait si on écrit $a = a_1 + i a_2$, $b = b_1 + i b_2$ on a que les 4 variables satisfont

$a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 = 1$ $\rightarrow$ elles définissent S^3, la sphère unité à 3 dimensions dans $\mathbb{R}^4$. C'est en fait une variété simplement connexe (comme $S2$).

7) Relation entre SO(3) et SU(2)

* On va maintenant établir de façon précise la relation entre SO(3) et SU(2). On sait que les algèbres sont isomorphes, donc il doit exister un homomorphisme entre les 2 groupes qui est un isomorphisme dans un voisinage de l'identité. Mais il est clair que cela ne pourra pas être étendu aux groupes dans leur entièreté, car la structure globale diffère : SU(2) est simplement connexe, alors que SO(3) ne l'est pas (à cause des identifications antipodales : $R(\vec{n}_i, \pi) = R(-\vec{n}_i, -\pi)$, n_i vecteur unité pointant le long de l'axe de rotation)
* On va donc commencer par trouver un homomorphisme de SU(2) vers SO(3) et ensuite étudier ses propriétés.

* Considérons l'ensemble des matrices hermitiennes de trace nulle : $X^\dagger = X$, $\mathrm{tr}\, X = 0$. On peut définir l'action du groupe SU(2) sur cet ensemble de la manière suivante : $\forall M \in SU(2)$ on agit $X \to X' = MXM^\dagger$. C'est une action linéaire, avec $X'^\dagger = MX^\dagger M^\dagger = MXM^\dagger = X'$ et $\mathrm{tr}\, X' = \mathrm{tr}\, MXM^\dagger = \mathrm{tr}\, XM^\dagger M = \mathrm{tr}\, X = 0$

* Or l'ensemble des matrices X ci-dessus est un espace vectoriel, et on peut en choisir une base donnée par les matrices de Pauli τ_i vues précédemment.

On peut donc écrire $X = x_i \tau_i = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - i x_2 \\ x_1 + i x_2 & -x_3 \end{pmatrix}$

* C'est intéressant de ~~noter~~ remarquer que dans cette paramétrisation de X, on a $\det X = -x_3^2 - (x_1+ix_2)(x_1-ix_2) = -x_i x_i$.

C'est encore plus intéressant quand on voit que

$\det X' = \det M X M^+ = \det M \det X \det M^+ = \det X$

et donc l'action de $SU(2)$ sur les X définit une action sur les x_i qui préserve la norme $x_i x_i$.

* On a donc que $X' = M X M^+$ se lit sur les x_i comme

$x_i' \tau_i = x_i M \tau_i M^+$; la transformation entre x_i et x_i' est une transformation orthogonale, c'est donc l'élément $f(M)$ de $SO(3)$ associé à chaque élément M de $SU(2)$, qui définit donc l'homomorphisme :

$x_i' = f(M)_{ij} x_j$; comme ceci est vrai pour tout x_i, on a que $f(M)_{ij} \tau_i = M \tau_j M^+$

* En utilisant la propriété suivante des matrices τ_i :

$\mathrm{tr}\, \tau_i \tau_j = 2\delta_{ij}$, on trouve finalement

$$f(M)_{ij} = \frac{1}{2} \mathrm{tr}\, \tau_i M \tau_j M^+$$ qui définit $f : SU(2) \to SO(3)$.

* C'est bien un homomorphisme de groupes car

$$f(M_1M_2)_{ij}\,\tau_i = M_1M_2\tau_j M_2^+ M_1^+ = f(M_2)_{kj} M_1 \tau_k M_1^+$$
$$= f(M_2)_{kj}\, f(M_1)_{ik}\,\tau_i = (f(M_1)f(M_2))_{ij}\,\tau_i$$

* On peut aussi le démontrer en utilisant une identité de Fierz : ~~on exploite le fait que suivant~~ :

$$(\tau_i)_{\alpha\beta}(\tau_i)_{\gamma\delta} = 2\,\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma} - \delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}$$

Ça peut se démontrer en ~~démontrant~~ que $(\mathrm{tr}\,\tau_i)\tau_i = 0$ et $\mathrm{tr}\,(\tau_i\tau_i)_{\alpha\beta} = 3\,\delta_{\alpha\beta}$, ou en réécrivant $N_\alpha^+ W_\beta$ en une base de matrices 2x2 formée de $(\tau_i)_{\alpha\beta}$ et $\delta_{\alpha\beta}$.

· On a donc

$$f(M_1)_{ik}\, f(M_2)_{kj} = \frac{1}{4}\,\mathrm{tr}\,\tau_i M_1 \tau_k M_1^+\; \mathrm{tr}\,\tau_k M_2 \tau_j M_2^+$$
$$= \frac{1}{4}(M_1^+\tau_i M_1)_{\beta\alpha}(\tau_k)_{\alpha\beta}(\tau_k)_{\gamma\delta}(M_2\tau_j M_2^+)_{\delta\gamma}$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\, M_1^+\tau_i M_1 M_2 \tau_j M_2^+ - \frac{1}{4}\,\underbrace{\mathrm{tr}\, M_1^+\tau_i M_1}_{=0}\;\underbrace{\mathrm{tr}\, M_2\tau_j M_2^+}_{=0}$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\tau_i M_1 M_2 \tau_j (M_1M_2)^+ = f(M_1M_2)_{ij}.$$

* On veut maintenant démontrer que $\mathrm{Im}\, \rho = SO(3)$, c'est à dire que toute rotation (déterminée par un axe de rotation et un angle φ) peut être obtenue comme $\rho(M)$ avec $M \in SU(2)$. Pour éviter des détails trop techniques, on va donner une preuve "restreinte" mais assez instructive.

* Essentiellement on profite du choix de base pour aligner l'axe de rotation à la direction x_3. La matrice de $SO(3)$ $\rho(M)$ laisse donc x_3 inchangé, ce qui équivaut à dire que $M\sigma_3 M^+ = \sigma_3 \Leftrightarrow M\sigma_3 = \sigma_3 M$

· si $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}$

on a déjà vu que $M\sigma_3 = \sigma_3 M$ implique $b = 0 = c$

· comme $M \in SU(2)$ $|a|^2 = 1$ et $d = a^*$

donc $M = \begin{bmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{bmatrix}$

* On calcule maintenant $X' = M X M^+$

$$X' = \begin{bmatrix} e^{i\varphi/2} & \\ & e^{-i\varphi/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-i\varphi/2} & \\ & e^{i\varphi/2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{i\varphi/2} & \\ & e^{-i\varphi/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-i\varphi/2} x_3 & e^{i\varphi/2}(x_1 - ix_2) \\ e^{-i\varphi/2}(x_1 + ix_2) & -e^{i\varphi/2} x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 & e^{i\varphi}(x_1 - ix_2) \\ e^{-i\varphi}(x_1 + ix_2) & -x_3 \end{bmatrix}$$

et on a donc $x_3' = x_3$ et

$$x_1' - i x_2' = (\cos\varphi + i \sin\varphi)(x_1 - i x_2)$$
$$= (\cos\varphi \, x_1 + \sin\varphi \, x_2) + i(-\sin\varphi \, x_1 + \cos\varphi \, x_2) ,$$

de sorte à ce que $\quad f(M)_{ij} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ce qui est bien une rotation d'angle φ autour de l'axe des x_3.

* On se convainc ainsi que toute rotation, de n'importe quel angle, peut être obtenue à partir d'un $M \in SU(2)$. f est donc surjectif. Par contre il ne sera pas injectif, car on voit immédiatement que $f(M) = f(-M)$:
$$f(-M)_{ij} = \tfrac{1}{2} \operatorname{tr} \tau_i (-M) \tau_j (-M)^+ = \tfrac{1}{2} \operatorname{tr} \tau_i M \tau_j M^+ = f(M)_{ij}$$

* On veut donc déterminer $\ker f$: l'ensemble des $M \in SU(2)$ tels que $f(M)_{ij} = \delta_{ij} \iff M \tau_i M^+ = \tau_i \iff M\tau_i = \tau_i M$

* On a déjà vu que $M\tau_3 = \tau_3 M \iff M = \begin{bmatrix} e^{i\alpha} & \\ & e^{-i\alpha} \end{bmatrix}$

$$M\tau_2 = M\tau_2 M \iff \begin{bmatrix} & -ie^{i\alpha} \\ ie^{-i\alpha} & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & -ie^{-i\alpha} \\ ie^{i\alpha} & \end{bmatrix} \iff (e^{i\alpha})^2 = 1$$

$M\tau_1 = \tau_1 M$ impose la même condition.

on a donc $\ker f = \{ \mathbb{1}_2, -\mathbb{1}_2 \}$

Cela traduit formellement la constatation que $f(M) = f(-M)$.

* On notera que $\ker f = Z(SU(2))$. Ce n'est pas un hasard : on avait trouvé $Z(SU(2))$ en imposant la commutation avec $e^{i\varphi\tau_3}$ et $e^{i\theta\tau_2}$; une matrice qui commute avec A commute aussi avec A^n, et donc avec ~~f(A)~~ une fonction de A (définie par sa série de Taylor).

* En utilisant encore une fois l'isomorphisme $\frac{G}{\ker f} \simeq \mathrm{Im} f$, on obtient finalement la relation entre $SO(3)$ et $SU(2)$:

$$SO(3) \simeq \frac{SU(2)}{\mathbb{Z}_2}$$

* En tant que variété, ~~SO(3)~~ comme $SU(2)$ est S^3, $SO(3)$ est donc $S^3/\mathbb{Z}_2$, c'est à dire S^3 où on identifie les points antipodaux (S^3 est définie par a_1, a_2, b_1, b_2 tels que $a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2=1$; on identifie (a_1, a_2, b_1, b_2) à $(-a_1, -a_2, -b_1, -b_2)$).

* Une rotation d'angle 2π est égale à l'identité dans $SO(3)$, mais elle ne l'est pas dans $SU(2)$: elle correspond à $-\mathbb{1}_2$. Si on prend une famille de rotations paramétrisées par $2\pi t$, $t \in [0,1)$

cette famille décrit une courbe fermée non contractible dans $SO(3)$ (qui n'est donc pas simplement connexe).
Par contre la courbe $4\alpha t$, $t \in [0,1]$ est contractible dans $SO(3)$ car elle décrit une courbe fermée dans $SU(2)$, qui est simplement connexe.

* Bien entendu, on est habitués, dans l'espace $\mathbb{R}^3$, à considérer une rotation d'angle 2π comme l'identité. La question donc se pose de comprendre la valeur "physique" de $SU(2)$. En d'autres termes, y a-t-il un objet physique qui distingue une rotation d'angle 2π de celle d'angle nul ? La réponse est oui, il s'agit d'une particule de spin $1/2$. Pour ~~comprendre~~ arriver à cette réponse, il faut aborder le chapitre des représentations de $SU(2)$ et de $SO(3)$.

(8) Représentations de SU(2) et SO(3)

* On va commencer par construire les représentation de SU(2), car il est en quelques sortes plus grand que SO(3). En fait on va commencer par les représentations de l'algèbre su(2) qui est de toute façon isomorphe à so(3).

* On part donc de l'algèbre de su(2) qui est données par le générateurs t_i $i=1,2,3$ et les relations de commutation

$$[t_i, t_j] = \varepsilon_{ijk} t_k \quad ;$$

à noter que on a jusqu'à présent considéré des générateurs <u>anti</u> hermitiens pour su(2) : $t_i^\dagger = -t_i$

* En physique on préfère travailler avec des opérateurs hermitiens (ça nous épargne des signes fastidieux...), on va donc définir ~~dans~~ les opérateurs suivants :

$J_i = i t_i$, $J_i^\dagger = -i t_i^\dagger = i t_i = J_i$ hermitiens ;

les relations de commutations deviennent

$$[J_i, J_j] = i \varepsilon_{ijk} J_k \quad \text{c'est à dire}$$

$$[J_1, J_2] = i J_3 \ , \ [J_2, J_3] = i J_1 \ , \ [J_3, J_1] = i J_2$$

* On prend maintenant la combinaison linéaire suivante des générateurs J_1 et J_2 :

$J_\pm = J_1 \pm i J_2$

on a que $J_+^\dagger = J_1^\dagger - i J_2^\dagger = J_1 - i J_2 = J_-$, $J_-^\dagger = J_+$.

$\to$ J_+ et J_- sont hermitiens conjugués l'un de l'autre.

À noter qu'on considère ici une combinaison linéaire à coefficients complexes, on prends donc l'algèbre comme un espace vectoriel sur les complexes. On fera de même pour les représentations.

* En termes des J_+, J_- et J_3 l'algèbre s'écrit :

$[J_+, J_-] = [J_1 + i J_2, J_1 - i J_2] = -i[J_1, J_2] + i[J_2, J_1] = 2J_3$

$[J_3, J_\pm] = [J_3, J_1 \pm i J_2] = i J_2 \pm i(-i J_1) = \pm J_1 + i J_2 = \pm J_\pm$

donc : $[J_+, J_-] = 2J_3$, $[J_3, J_+] = J_+$, $[J_3, J_-] = -J_-$

* Introduisons un opérateur supplémentaire : on va l'appeler le "Casimir de su(2)" et on l'écrit

$J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = J_i J_i$

Il commute avec tout élément de l'algèbre : en effet

$[J^2, J_j] = [J_i J_i, J_j] = J_i [J_i, J_j] + [J_i, J_j] J_i$

$= i \varepsilon_{ijk} (J_i J_k + J_k J_i) = i(\varepsilon_{ijk} + \varepsilon_{kji}) J_i J_k = 0$.

Par le lemme de Schur, $J^2 \propto \mathbb{1}$ dans une représentation irréductible.

* À noter que J^2 est hermitien, $(J^2)^\dagger = J_i^\dagger J_i^\dagger = J_i J_i = J^2$ mais en fait il n'appartient pas à l'algèbre de su(2), car il n'est pas de trace nulle. Mais il est utile pour définir un invariant, propre à chaque représentation irréductible.

* Comme $J_+ J_- = (J_1 + iJ_2)(J_1 - iJ_2) = J_1^2 + J_2^2 - i[J_1, J_2] = J_1^2 + J_2^2 + J_3$

on a que $J^2 = J_+ J_- + J_3^2 - J_3 = J_- J_+ + J_3^2 + J_3$

* On commence maintenant la construction explicite d'une représentation irréductible de su(2) en toute généralité.

- On suppose la dimension de la représentation finie
- On diagonalise J_3 qui, étant hermitien, a des valeurs propres réelles ; on choisit une base de l'espace vectoriel de la représentation composée de vecteurs propres de J_3 :

$$J_3 \mu_m^A = m \mu_m^A$$

[les vecteurs propres de valeurs propres différentes sont orthogonaux]

a priori on permet une dégénérescence des espaces propres, mais on va laisser tomber l'indice A et justifier a posteriori la non-dégénérescence.

- Notons tout de suite que le vecteur $J_\pm \mu_m$ a la propriété suivante :

$$J_3 J_\pm \mu_m = (J_\pm J_3 \pm [J_3, J_\pm])\mu_m = J_\pm m \mu_m \pm J_\pm \mu_m$$

$$= (m \pm 1) J_\pm \mu_m$$

donc $J_\pm \mu_m \propto \mu_{m\pm 1}$

* En fait on peut se demander si $J_+(J_- \mu_m) \propto \mu_m$ ou pas. Si oui, alors on en déduit qu'en agissant avec J_+ et J_- on ne crée pas de dégénérescence à chaque niveau. Or :

$$J_+ J_- \mu_m = (J^2 - J_3^2 + J_3) = (C_\mu - m^2 + m)\mu_m \propto \mu_m$$

où C_μ est le Casimir de la représentation donnée, qui est assumée être irréductible.

* Comme on a un nombre fini de vecteurs μ_m, il y en a un qui a la valeur propre plus grande, qu'on appelle j : Ce vecteur sera tel que $J_3 \mu_j = j \mu_j$

$J_+ \mu_j = 0$ sinon $J_+ \mu_j$ aurait une valeur propre plus grande que μ_j.

* Par les raisonnement précédents, on construit tous les vecteurs de la base en agissant avec J_- à répétition :

$$J_-^k \mu_j \propto \mu_{j-k}$$

Dans la représentation, on aura exactement un vecteur propre par valeur propre $j-k$, et celles-ci sont espacées exactement par des entiers consécutifs.

* En fait, en assumant qu'il existe une valeur propre maximale j, on peut montrer que la représentation est de dimension finie.

∘ On considère tous les μ_m de norme 1 : $\mu_m^\dagger \mu_m = 1$.

on écrit donc $J_-^k \mu_j = \alpha_k \mu_{j-k}$;

on note à présent que

$$J_+ \mu_{j-k} = \frac{1}{\alpha_k} J_+ J_-^k \mu_j$$

$$= \frac{1}{\alpha_k} (J_- J_+ + 2J_3) J_-^{k-1} \mu_j$$

$$= \frac{1}{\alpha_k} \left(J_- J_+ J_-^{k-1} + 2(j-k+1) J_-^{k-1} \right) \mu_j$$

$$= \frac{1}{\alpha_k} \left[J_- (J_- J_+ + 2J_3) J_-^{k-2} + 2(j-k+1) J_-^{k-1} \right] \mu_j$$

$$= \dots = \frac{1}{\alpha_k} \left[2j + 2(j-1) + \dots + 2(j-k+1) \right] J_-^{k-1} \mu_j$$

$$= \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} \sum_{\ell=0}^{k-1} 2(j-\ell) \cdot \mu_{j-k+1}$$

$$= \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} 2 \left[j \cdot k - \frac{(k-1)k}{2} \right] \mu_{j-k+1}$$

$$= \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} k (2j-k+1) \mu_{j-k+1}$$

∗ On a donc pour la norme qui doit être positive :

$$|\alpha_k|^2 = \mu_j^\dagger (J_-^k)^\dagger J_-^k \mu_j = \mu_j^\dagger J_+^k J_-^k \mu_j = \mu_j^\dagger J_+^{k-1} J_+ J_-^k \mu_j$$

$$= |\alpha_{k-1}|^2 k (2j-k+1) ,$$

ou en d'autres termes, $k \to k+1$

$$|\alpha_{k+1}|^2 = |\alpha_k|^2 (k+1)(2j-k)$$

* k est un entier positif, donc on voit tout de suite que pour que $|\alpha_k|^2 > 0 \Rightarrow |\alpha_{k+1}|^2 \geq 0$, on doit avoir $j > 0$, mais aussi que k ne peut pas devenir arbitrairement grand. Ceci est possible s'il existe un k tel que $J_-^k \mu_j$ est un vecteur propre, mais $J_-^{k+1}\mu_j = 0$. On voit que ceci est vrai quand $k = 2j$. Donc $J_-^{2j}\mu_j \propto \mu_{-j}$, et $-j$ est la valeur propre plus petite.

* Encore plus important, j ne peut pas prendre n'importe quelle valeur dans $\mathbb{R}^+$, mais doit être <u>entier</u> ou <u>demi-entier</u>: $j = k/2$.

* Un autre argument qui mène à la même conclusion est le suivant. Notons d'abord que J^2 doit avoir la même valeur propre sur toute la représentation, on l'évalue donc pour μ_j : $J^2\mu_j = (J_-J_+ + J_3^2 + J_3)\mu_j = j(j+1)\mu_j$.
On aura donc $J^2\mu_m = j(j+1)\mu_m \quad \forall m$.

Ensuite on suppose que $\mu_m^\dagger \mu_m = 1$ et on demande que $J_-\mu_m$ soit de norme positive :

$$\mu_m^\dagger J_+ J_- \mu_m = \mu_m^\dagger (J^2 - J_3^2 + J_3)\mu_m = j(j+1) - m^2 + m \geq 0$$

m ne peut pas devenir trop négatif. Il $\exists$ donc m tel que $j(j+1) - m(m-1) = 0 \quad \rightarrow \quad m = -j$.

* Une représentation irréductible de $su(2)$ est donc composée de $2j+1$ vecteurs : $\mu_j, \mu_{j-1}, \dots, \mu_{-j+1}, \mu_{-j}$

→ elle est de dimension $2j+1$.

* Si on écrit μ_m pour les vecteurs orthonormés de la base de l'espace de la représentation, on a donc (avec donc $m=j-k$ par rapport à la notation précédente) :

- $J_3 \mu_m = m \mu_m$
- $J_+ \mu_m = J_+ \mu_{j-k} = \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} k(2j-k+1) \mu_{j-k+1}$

or on a déjà trouvé (posant tous les $\alpha_k \in \mathbb{R}^+$)

$$\frac{\alpha_k}{\alpha_{k-1}} = \sqrt{k(2j-k+1)}$$

$$\rightarrow J_+ \mu_m = \sqrt{k(2j-k+1)}\, \mu_{j-k+1} = \sqrt{(j-m)(j+m+1)}\, \mu_{m+1}$$

- $J_- \mu_m = J_- \mu_{j-k} = \frac{1}{\alpha_k} J_- J_-^k \mu_j = \frac{1}{\alpha_k} J_-^{k+1} \mu_j = \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} \mu_{j-k-1}$

$$= \sqrt{(k+1)(2j-k)}\, \mu_{j-k-1} = \sqrt{(j-m+1)(j+m)}\, \mu_{m-1}$$

On a donc, en termes de matrices $(2j+1)\times(2j+1)$:

$$J_3 = \begin{pmatrix} j & & & & \\ & j-1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -j+1 & \\ & & & & -j \end{pmatrix}, \quad J^+ = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2j} & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \sqrt{2j} \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad J^- = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \sqrt{2j} & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \sqrt{2j} & 0 \end{bmatrix}$$

* Dans un contexte de mécanique quantique, on appelle les vecteurs μ_m "états" et on les écrit
$\mu_m \equiv |j,m\rangle$ où donc on explicite qu'il s'agit de la représentation caractérisée par j. Ces représentations sont souvent appelées D_j, ou encore simplement "j", ou "$2j+1$" par leur dimension, ou enfin $[2j]$.
À noter pour l'instant que les représentations de $su(2)$ sont la notion de base à partir de laquelle on construit toutes les algèbres de Lie ainsi que leurs représentations, et c'est cette perspective qui a motivé notre notation (du moins partiellement...).

* On passe à présent aux représentations du groupe $SU(2)$. En toute généralité, comme $SU(2)$ est simplement connexe, on s'attend à ce que toute représentation de son algèbre s'exponentie à une représentation du groupe. Ainsi, les représentations de $SU(2)$ ont aussi $2j+1$ dimensions mais l'action de la représentation d'un élément de $SU(2)$ sera nécessairement plus compliquée que la simple combinaison linéaire des matrices J_i comme dans le cas de l'algèbre.

* Si on prend un élément de l'algèbre

$x = x_i t_i = -i x_i J_i$ (dans la représentation de dimension $2j+1$)

on obtient donc l'élément du groupe suivant, représenté lui aussi par une matrice $(2j+1) \times (2j+1)$

$$e^x = e^{-i x_i J_i} \quad ;$$

si on aligne x_i le long de la 3^e composante

$$x_i = (0, 0, \theta) \quad \rightarrow \quad x_i J_i = \begin{bmatrix} j\theta & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -j\theta \end{bmatrix}$$

et donc
$$e^x = \begin{bmatrix} e^{-ij\theta} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{ij\theta} \end{bmatrix}$$

Pour un élément quelconque c'est bien entendu plus compliqué.

* Une façon de décrire les représentations de $SU(2)$ est la suivante. Considérons le vecteur $z = (z_1\ z_2) \in \mathbb{C}^2$; il se transforme naturellement comme $z \rightarrow zM \quad \forall M \in SU(2)$.

Considérons ensuite une fonction $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C} : z \rightarrow f(z) = f(z_1, z_2)$

L'espace de toutes les fonctions f est une représentation de $SU(2)$: $f_M(z) = f(zM)$

c'est bien une représentation :

$$f_{M_1 M_2}(z) = f(zM_1 M_2) = f_{M_2}(zM_1) = (f_{M_2})_{M_1}(z)$$

(on peut écrire plutôt Mf pour se convaincre que ça va dans le bon sens)

* L'espace des fonctions étant infini, cette représentation est forcément réductible. En fait on note que $z \to z\Pi$ étant linéaire en z, si ~~...~~ $f(z)$ est un polynôme de degré fixé en z, alors $f_\Pi(z) = f(z\Pi)$ sera un polynôme de même degré. En d'autres termes, les monômes $z_1^{j+m} z_2^{j-m}$ avec $-j \leq m \leq j$ se transforment les uns dans les autres sous $z \to z\Pi$
→ c'est une représentation de dimension $(2j+1)$ de $SU(2)$ → l'exponentiation de D_j.

* En fait cette représentation nous permet d'écrire une forme différentielle des générateurs de $su(2)$:
si $\hat{\mu}_m \propto z_1^{j+m} z_2^{j-m}$ alors on passe de $\hat{\mu}_m$ à $\hat{\mu}_{m+1}$ en dérivant par rapport à z_2 et multipliant par z_1, l'opposé pour passer de $\hat{\mu}_m$ à $\hat{\mu}_{m-1}$ ~~; donc compte-m~~

$$J_+ = z_1 \frac{\partial}{\partial z_2} \quad , \quad J_- = z_2 \frac{\partial}{\partial z_1}$$

on trouve ensuite

$$[J_+, J_-] = z_1 \frac{\partial}{\partial z_2}\left(z_2 \frac{\partial}{\partial z_1}\right) - z_2 \frac{\partial}{\partial z_1}\left(z_1 \frac{\partial}{\partial z_2}\right) = z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} = 2J_3$$

en effet $J_3\, z_1^{j+m} z_2^{j-m} = \frac{1}{2}\left(z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right) z_1^{j+m} z_2^{j-m}$

$$= \frac{1}{2}(j+m-j+m)\, z_1^{j+m} z_2^{j+m} = m\, z_1^{j+m} z_2^{j-m}$$

on a enfin

$$[J_3, J_+] = \frac{1}{2}\left(z_1\frac{\partial}{\partial z_1} - z_2\frac{\partial}{\partial z_2}\right)\left(z_1\frac{\partial}{\partial z_2}\right) - \frac{1}{2}z_1\frac{\partial}{\partial z_2}\left(z_1\frac{\partial}{\partial z_1} - z_2\frac{\partial}{\partial z_2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}z_1\frac{\partial}{\partial z_2} + \frac{1}{2}z_1\frac{\partial}{\partial z_2} = z_1\frac{\partial}{\partial z_2} = J_+$$

$$[J_3, J_-] = \frac{1}{2}\left(z_1\frac{\partial}{\partial z_1} - z_2\frac{\partial}{\partial z_2}\right)\left(z_2\frac{\partial}{\partial z_1}\right) - \frac{1}{2}z_2\frac{\partial}{\partial z_1}\left(z_1\frac{\partial}{\partial z_1} - z_2\frac{\partial}{\partial z_2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}z_2\frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{1}{2}z_2\frac{\partial}{\partial z_1} = -z_2\frac{\partial}{\partial z_1} = -J_-$$

Cette représentation de J_+, J_- et J_3 génère des transformations infinitésimales sur les $\hat{p}_m$. Les transformations finies agissent en toute généralité $(\hat{p}_m)_\Pi(z) = \hat{p}_m(z\Pi)$.

* On peut se poser la question de quelles représentations de $SU(2)$ sont aussi des représentations de $SO(3)$.

On a vu que $SO(3) \simeq SU(2)/\mathbb{Z}_2$, avec donc tant $\mathbb{1}_2$ que $-\mathbb{1}_2 \in SU(2)$ qui sont associées à $\mathbb{1}_3$ de $SO(3)$.

On dira donc qu'une représentation D_j de $SU(2)$ est aussi une représentation de $SO(3)$ si $D_j(-\mathbb{1}_2) = \mathbb{1}_{2j+1}$

* On a que $-\mathbb{1}_2 = \begin{bmatrix} e^{-i\frac{1}{2}\varphi} & \\ & e^{i\frac{1}{2}\varphi} \end{bmatrix}$ pour $\varphi = 2\pi$

car la représentation de dimension 2 qui définit $SU(2)$ correspond à $D_{1/2}$. On a donc

$$D_j(-\mathbb{1}_2) = \begin{bmatrix} e^{-ij2\pi} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{+ij2\pi} \end{bmatrix} = \mathbb{1}_{2j+1} \quad \text{si } j \in \mathbb{Z}^+$$

$$\text{ou } -\mathbb{1}_{2j+1} \text{ si } j \in \mathbb{Z}^+ + \tfrac{1}{2}.$$

* On en déduit que les D_j avec j entier sont des représentations de $SO(3)$, celles avec j demi-entier le sont uniquement de $SU(2)$.

* On introduit, pour finir ce chapitre, les caractères des représentations de $SU(2)$. Tout d'abord souvenons nous que les caractères sont identiques pour tous les éléments d'une classe de conjugaison : $\chi_T(g) = \chi_T(g' g g'^{-1})$.
Or on peut diagonaliser une matrice unitaire, justement par une conjugaison. Il nous suffira donc de considérer des matrices unitaires diagonales, qui dépendent d'un seul paramètre φ :

$$D_j(\varphi) = \begin{bmatrix} e^{-ij\varphi} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{ij\varphi} \end{bmatrix}$$

On a donc $\chi_j(\varphi) = \mathrm{tr}\, D_j(\varphi) = \sum_{m=-j}^{j} e^{-im\varphi}$

* Ceci peut se réécrire de la manière suivante :

$$\chi_j = e^{+ij\varphi} \sum_{n=0}^{2j} (e^{-i\varphi})^n = e^{+ij\varphi} \frac{1 - e^{-i(2j+1)\varphi}}{1 - e^{-i\varphi}} = \frac{e^{i(j+\frac{1}{2})\varphi} - e^{-i(j+\frac{1}{2})\varphi}}{e^{i\varphi/2} - e^{-i\varphi/2}}$$

$$= \frac{\sin(j+\frac{1}{2})\varphi}{\sin \varphi/2}$$

• On vérifiera que pour $\varphi = 0$

$$\chi_j(0) = \lim_{\varphi \to 0} \frac{\sin(j+\frac{1}{2})\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi} \approx \frac{\sin(j+\frac{1}{2})\varphi}{\frac{1}{2}\varphi} = 2j+1 = \dim D_j$$

Par contre pour $\varphi = 2\pi$ on a

$$\chi_j(2\pi) = \lim_{\tilde{\varphi} \to 0} \frac{\sin(j+\frac{1}{2})(2\pi - \tilde{\varphi})}{\sin(\pi - \frac{1}{2}\tilde{\varphi})} = \lim_{\tilde{\varphi} \to 0} \frac{\sin\left[\pi(2j+1) - \frac{2j+1}{2}\tilde{\varphi}\right]}{\sin \tilde{\varphi}/2} = (-1)^{2j}(2j+1)$$

à nouveau on voit que pour $j \in \mathbb{Z}^+ + \frac{1}{2}$ $\chi_j^{(2\pi)} \neq \dim D_j$ et donc D_j ne peut être une représentation de $SO(3)$.

• Par exemple, $\chi_0 = 1$, $\chi_{1/2} = 2\cos\varphi/2$ $\chi_1 = 1 + 2\cos\varphi$;

à noter aussi que les caractères χ_j satisfont la relation d'orthogonalité :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi\,(1-\cos\varphi)\,\chi_j(\varphi)\,\chi_{j'}(\varphi) = \delta_{jj'}$$

où $(1-\cos\varphi)$ est la mesure du groupe.

En fait ce produit peut se réécrire

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi\, 2\sin^2\varphi/2\, \frac{\sin(j+\frac{1}{2})\varphi}{\sin\varphi/2}\,\frac{\sin(j'+\frac{1}{2})\varphi}{\sin\varphi/2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi\, \sin(j+\tfrac{1}{2})\varphi\, \sin(j'+\tfrac{1}{2})\varphi$$

donc cela ~~nous~~ peut nous rappeler la transformée de Fourier, et nous familiariser avec le fait que les $\chi_j(\varphi)$ constituent une base des fonctions de 0 à 2π.

* On profite de cet aspect pour étudier le produit tensoriel de représentations par le biais de leur caractères. On sait que $\chi_{T_1 \otimes T_2} = \chi_{T_1} \cdot \chi_{T_2}$.

Donc $\chi_{j \otimes j'}(\varphi) = \chi_j(\varphi)\chi_{j'}(\varphi) = \dfrac{\sin(j+\frac{1}{2})\varphi \cdot \sin(j'+\frac{1}{2})\varphi}{\sin^2 \varphi/2}$

or cette fonction de φ peut être décomposée en la base des $\chi_j(\varphi)$ eux-mêmes.

* On peut se convaincre de plusieurs manières (en manipulant les fonctions trigonométriques et/ou les sommes) qu'on a la relation suivante : $(j \geq j')$:

$$\chi_j(\varphi)\chi_{j'}(\varphi) = \sum_{m=0}^{2j'} \chi_{j+j'-m}(\varphi)$$

Par exemple : $\chi_{1/2}(\varphi) = e^{i\varphi/2} + e^{-i\varphi/2} = 2\cos\varphi/2 = \dfrac{\sin\varphi}{\sin\varphi/2}$

$$\chi_{\frac{1}{2}}(\varphi)\chi_{\frac{1}{2}}(\varphi) = (e^{i\varphi/2} + e^{-i\varphi/2})^2 = e^{i\varphi} + 2 + e^{-i\varphi}$$
$$= (e^{i\varphi} + 1 + e^{i\varphi}) + 1 = 1 + 2\cos\varphi + 1 = \chi_1(\varphi) + \chi_0(\varphi)$$

* On a donc $D_j \otimes D_{j'} = D_{j+j'} \oplus D_{j+j'-1} \oplus \dots \oplus D_{j-j'}$

toutes les représentations entre $j+j'$ et $j-j'$ apparaissent une et une seule fois.

* Remarquons pour finir que la représentation D_j est obtenue en prenant la composante irréductible de valeur m plus élevée dans le produit tensoriel de $2j$ fois la représentation $D_{1/2}$ (représentation <u>fondamentale</u>)

(9) Le groupe de Lorentz

- Le groupe de Lorentz est le groupe des transformations de $\mathbb{R}^4$ qui préservent la norme Minkowskienne.
  On écrit x^μ avec $\mu = 0,1,2,3$ les composantes d'un quadrivecteur, et on calcule sa norme en prenant $x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\nu$ avec $\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$,
  qui est la métrique Minkowskienne.

- Attention on choisit cette métrique, diag$(+---)$, mais l'autre convention, diag$(-+++)$, est tout à fait équivalente physiquement. La convention $(+---)$ est préférée en théorie quantique des champs, celle $(-+++)$ est préférée en gravitation (relativité générale), essentiellement pour des raisons historiques. À noter aussi qu'on prend $c=1$, ou alors $x^0 \equiv ct$.

- On a donc $x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\nu = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$ et on écrira plutôt $x^\mu \in \mathbb{R}^{1,3}$ pour rendre manifeste la signature $(+---)$. Aussi, on prend la convention que les indices μ, ν sont contractés quand ils se répètent une fois en haut et une fois en bas.
  On définit $x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3)$,
  et on a aussi $\eta^{\mu\nu} = (+---) \equiv \eta^{-1}$ et $\eta_{\mu\nu}\eta^{\nu\rho} = \delta_\mu^\rho$ $(\eta\eta^{-1} = \mathbb{1}_4)$.

* On définit donc le groupe de Lorentz comme le groupe des transformation $\Lambda : \mathbb{R}^{1,3} \to \mathbb{R}^{1,3} : x \to x' = \Lambda x$ tellesque $x'^{\mu} \eta_{\mu\nu} x'^{\nu} = x^{\mu} \eta_{\mu\nu} x^{\nu}$, $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$.

Ceci est vrai $\forall x^{\mu}$ si $\Lambda^{\mu}{}_{\rho} \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}{}_{\sigma} = \eta_{\rho\sigma}$ ou, en notation matricielle, $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$, ou encore $\Lambda^{-1} = \eta^{-1} \Lambda^T \eta$

* On remarque la similitude avec le groupe orthogonal sur $\mathbb{R}^4$, à des signes près. On appelle donc le groupe des matrices Λ qui satisfont la relation ci-dessus $O(1,3)$ ou encore L , pour Lorentz (surtout en physique..).

* Comme pour $O(d)$, la relation $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ implique une condition sur $\det \Lambda$:

$\det \Lambda^T \eta \Lambda = \det \eta \Leftarrow (\det \Lambda)^2 = 1$ ($\det \eta = -1$ se simplifie des 2 côtés).

On distingue donc entre les matrices tellesque $\det \Lambda = 1$ (dont $\Lambda = \mathbb{1}_4$), et celles telles que $\det \Lambda = -1$. On définit

$SO(1,3) = L_+ = \{ \Lambda \text{ t.q. } \det \Lambda = 1 \}$ qui est un sous groupe de L , et

$L_- = \{ \Lambda \text{ t.q. } \det \Lambda = -1 \}$ qui n'est pas un sous groupe car $\mathbb{1} \notin L_-$.

• On peut définir la matrice $P^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$

(attention, à ne pas confondre avec $\eta_{\mu\nu}$!!)

qui opère un renversement de la partie spatiale $x^{1,2,3} \to -x^{1,2,3}$ en ne touchant pas au temps $x^0 \to x^0$;

dét $P = -1$ et donc on peut définir $L_- = PL_+ = L_+P$;

notons toutefois que P <u>ne commute pas</u> avec tout élément de L_+.

* La signature de $O(1,3)$ nous permet de déterminer une autre composante non connexe ; en effet

$\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma}$ implique, pour $(\rho\sigma) = (0,0)$ que

$$(\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_i (\Lambda^i{}_0)^2 = 1 \quad \leftrightarrow \quad (\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + \sum_i (\Lambda^i{}_0)^2 \geq 1$$

$$\leftrightarrow \quad \Lambda^0{}_0 = \pm\sqrt{1 + \sum_i (\Lambda^i{}_0)^2}$$

mais qu'on ne peut pas varier continûment les éléments de $\Lambda^\mu{}_\nu$ et passer de $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ à $\Lambda^0{}_0 \leq -1$ ou vice-versa. On définit donc

$L^\uparrow = \{\Lambda$ t.q. $\Lambda^0{}_0 \geq 1\}$ ≡ transformations qui préservent l'orientation du temps

et $L^\downarrow = \{\Lambda$ t.q. $\Lambda^0{}_0 \leq -1\}$.

De manière évidente, $\mathbb{1}_4 \in L^\uparrow$.

* En fait $L^\uparrow$ est un sous groupe de L. Il faut montrer que si $\Lambda_1, \Lambda_2 \in L^\uparrow$, alors $\Lambda_1\Lambda_2 \in L^\uparrow$;

or $(\Lambda_1\Lambda_2)^0{}_0 = (\Lambda_1)^0{}_\mu(\Lambda_2)^\mu{}_0 = (\Lambda_1)^0{}_0(\Lambda_2)^0{}_0 + (\Lambda_1)^0{}_i(\Lambda_2)^i{}_0$.

À présent on note que non seulement $(\Lambda^0{}_0)^2 = 1+\sum_i(\Lambda^i{}_0)^2$ mais aussi $(\Lambda^0{}_0)^2 = 1+\sum_i(\Lambda^0{}_i)^2$. En effet si $\tilde\Lambda^T\eta\tilde\Lambda=\eta$ alors $\tilde\Lambda^{-1}\eta^{-1}(\tilde\Lambda^{-1})^T=\eta^{-1}$; en prenant $\tilde\Lambda^{-1}=\Lambda$ on a $\Lambda^\mu{}_\rho\,\eta^{\rho\sigma}\Lambda^\nu{}_\sigma=\eta^{\mu\nu}$ et donc $(\Lambda^0{}_0)^2-\sum_i(\Lambda^0{}_i)^2=1$.

Donc, par $\Lambda_1,\Lambda_2\in L^\uparrow$

$$(\Lambda_1\Lambda_2)^0{}_0 = +\sqrt{1+\sum_i(\Lambda_1{}^0{}_i)^2}\sqrt{1+\sum_j(\Lambda_2{}^j{}_0)^2} + \Lambda_1{}^0{}_i\Lambda_2{}^i{}_0$$

$$\cancel{\geq\sqrt{1+\sum_i}} > \sqrt{\sum_i(\Lambda_1{}^0{}_i)^2}\sqrt{\sum_j(\Lambda_2{}^j{}_0)^2} + \Lambda_1{}^0{}_i\Lambda_2{}^i{}_0$$

$$\geq \sqrt{\sum_i(\Lambda_1{}^0{}_i)^2}\sqrt{\sum_j(\Lambda_2{}^j{}_0)^2} - |\Lambda_1{}^0{}_i\Lambda_2{}^i{}_0|$$

≥ 0 par l'inégalité de Cauchy-Schwartz où l'on prend $v_{1i}\equiv\Lambda_1{}^0{}_i$, $v_{2i}\equiv\Lambda_2{}^i{}_0$ pour avoir $|v_1\cdot v_2|\leq\|v_1\|\cdot\|v_2\|$.

et on a établi que $\Lambda_1\Lambda_2\in L^\uparrow$.

* Un représentant de $L^{\downarrow}$ est $T=\begin{bmatrix}-1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix}$ le renversement du temps : $T^0{}_0=-1$. Il est clair que tout élément Λ de $L^\downarrow$ peut être écrit comme $T\Lambda'$ avec $\Lambda'\in L^\uparrow$: si $\cancel{\Lambda'\in L^\uparrow}$ $\Lambda'^0{}_0>0$, $\Lambda^0{}_0=(T\Lambda')^0{}_0=T^0{}_0\Lambda'^0{}_0+\cancel{T^0{}_i\Lambda'^i{}_0}=-\Lambda'^0{}_0<0$.

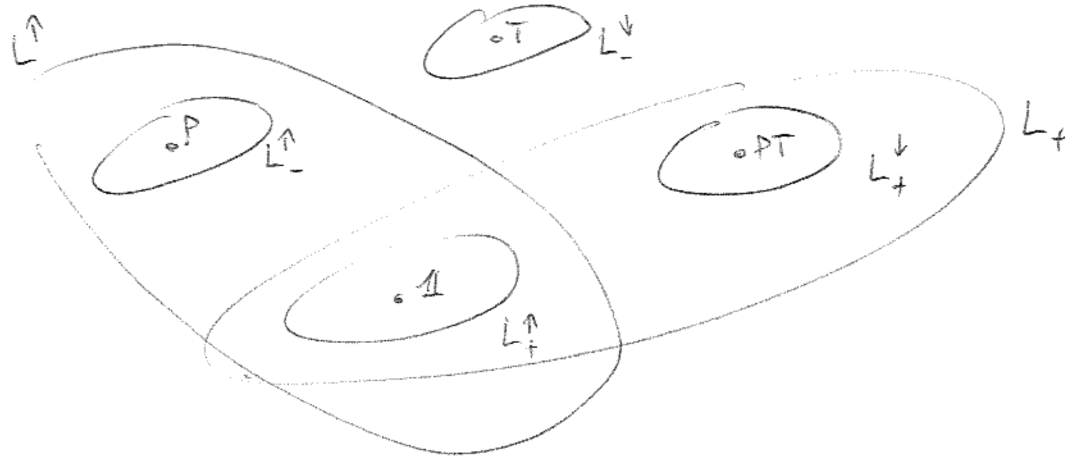
On a donc que $L^\downarrow=TL^\uparrow=L^\uparrow T$.

* Il devient donc clair que $L \equiv O(1,3)$ est composé de 4 composantes connexes, obtenues en prenant les intersections de L_+, L_- avec $L^\uparrow$ et $L^\downarrow$:

$$L_+^\uparrow = \{ \Lambda \text{ t.q. } \det \Lambda = 1 ,\ \Lambda^0{}_0 \geq 1 \}$$
$$L_+^\downarrow = \{ \Lambda \text{ t.q. } \det \Lambda = 1 ,\ \Lambda^0{}_0 \leq -1 \} = PT L_+^\uparrow$$
$$L_-^\uparrow = \{ \Lambda \text{ t.q. } \det \Lambda = -1 ,\ \Lambda^0{}_0 \geq 1 \} = P L_+^\uparrow$$
$$L_-^\downarrow = \{ \Lambda \text{ t.q. } \det \Lambda = -1 ,\ \Lambda^0{}_0 \leq -1 \} = T L_+^\uparrow .$$

$L_+^\uparrow$, $L_+ = L_+^\uparrow \cup L_+^\downarrow$, $L^\uparrow = L_+^\uparrow \cup L_-^\uparrow$ et $L_+^\uparrow \cup L_-^\downarrow$ sont des sous groupes de L

On a donc la structure suivante :



Comme $L_+^\uparrow$ est un sous groupe normal de L, on peut définir

$$\frac{L}{L_+^\uparrow} \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{ \mathbb{1}, P, T, PT \}$$

* À noter que $PT = TP = -\mathbb{1}_4$. On peut montrer ~~que~~ de façon analogue à $O(3)$, que PT est le seul élément non trivial du centre de $O(1,3) = L$. Il appartient aussi au centre de $SO(1,3) = L_+$ mais pas de $L_+^\uparrow$ qui a donc un centre trivial.

* Voyons maintenant des exemples d'éléments de $L_+^\uparrow$.

Tout élément tel que $\Lambda^0{}_0 = 1$ a nécessairement aussi $\Lambda^0{}_i = 0 = \Lambda^i{}_0$; la condition $\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \eta_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma}$ devient pour les $\Lambda^i{}_j$ $\Lambda^i{}_k \Lambda^j{}_\ell \delta_{ij}^{k\ell} = \delta^{k\ell}_{k\ell} \Leftrightarrow \tilde{\Lambda}^T \tilde{\Lambda} = \mathbb{1}_3$

où on a écrit $\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{\Lambda} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \tilde{\Lambda} \in SO(3)$

car $\det \tilde{\Lambda} = \det \Lambda = 1$; clairement $SO(3) \subset SO(1,3)$.

* Prenons par ailleurs une matrice avec $\Lambda^0{}_0 > 1$.

Supposons qu'elle ait la forme $\Lambda = \begin{pmatrix} \bar{\Lambda}_2 & 0 \\ 0 & \Pi_2 \end{pmatrix}$

avec $\bar{\Lambda}_2$ et Π_2 des matrices 2×2. De plus prenons $\Pi_2 = \mathbb{1}_2$.

On a donc que $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ impose pour $\bar{\Lambda}_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} a^2 - c^2 = 1 \\ d^2 - b^2 = 1 \\ ab - cd = 0 \end{matrix}$$

on paramétrise $\underset{(\Lambda^0{}_0 > 0)}{a = \operatorname{ch} t}$, $c = \operatorname{sh} t$, $\underset{(\det \Lambda = +1)}{d = \operatorname{ch} t'}$, $b = \operatorname{sh} t'$

$ab - cd = 0 \Leftrightarrow \operatorname{ch} t \operatorname{sh} t' - \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t' = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sh}(t - t') = 0$

$\Leftrightarrow t = t'$; donc pour finir

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t & 0 & 0 \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \underline{\text{boost}} \text{ de rapidité } t.$$

t est un paramètre <u>non compact</u> : $-\infty < t < +\infty$

* Considérons maintenant l'algèbre, qui est l'espace tangent à l'identité, et donc à la composante connexe $L_+^\uparrow$. On dénote toutefois l'algèbre $so(1,3)$.

On prend donc $\Lambda = \mathbb{1} + \omega$ ce qui implique

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \Leftrightarrow (\mathbb{1}+\omega^T)\eta(\mathbb{1}+\omega) = \eta \Leftrightarrow \omega^T\eta + \eta\omega = 0$$

$$\Leftrightarrow (\eta\omega)^T = -\eta\omega .$$

En composantes : $(\delta^\mu_\rho + \omega^\mu{}_\rho)\eta_{\mu\nu}(\delta^\nu_\sigma + \omega^\nu{}_\sigma) = \eta_{\rho\sigma}$

$$\Leftrightarrow \omega_{\sigma\rho} + \omega_{\rho\sigma} = 0$$

→ les transformations de Lorentz proches de l'identité sont paramétrisées par des matrices réelles antisymétriques

→ on a donc $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ paramètres.

* On a donc 6 générateurs, qu'on dénote $M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu}$, attention ici les indices labélisent les matrices, pas leurs éléments. On a que $(M^{\mu\nu})_{\rho\sigma} = -(M^{\mu\nu})_{\sigma\rho}$, mais on veut écrire les matrices avec les indices $(\Lambda)^\rho{}_\sigma$.

On a donc une base fournie par :

$$(M^{\mu\nu})^\rho{}_\sigma = \eta^{\mu\rho}\delta^\nu_\sigma - \eta^{\nu\rho}\delta^\mu_\sigma .$$

Par exemple :

$$M^{01} = \begin{bmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad M^{02} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad M^{03} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$\cdot = 0$

$$M^{12} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad M^{23} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \end{bmatrix} \quad M^{31} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

* À noter une propriété importante : on a $(M^{ij})^\dagger = -M^{ij}$ mais $(M^{0i})^\dagger = M^{0i}$. Ainsi cette représentation (qui définit) $SO(1,3)$ n'est pas unitaire, car il faudrait $t_a^\dagger = -t_a$ pour tous les générateurs. Ceci est lié au caractère non compact de L.

* Les commutateurs $[M^{\mu\nu}, M^{\lambda\tau}]$ s'obtiennent facilement en opérant les multiplications de matrices du type

$(M^{\mu\nu})^\rho{}_\alpha (M^{\lambda\tau})^\alpha{}_\sigma$ et ensuite en réordonnant les termes. On obtient (en supprimant les indices des éléments de matrice) :

$$[M^{\mu\nu}, M^{\lambda\tau}] = -\eta^{\mu\lambda} M^{\nu\tau} + \eta^{\mu\tau} M^{\nu\lambda} + \eta^{\nu\lambda} M^{\mu\tau} - \eta^{\nu\tau} M^{\mu\lambda}$$

* On voit qu'on a 2 ensembles de générateurs : M^{0i} et M^{ij}.

Pour les M^{ij} (on se rappelle que $\eta^{ij} = -\delta^{ij}$) :

$[M^{ij}, M^{kl}] = \delta^{ik} M^{jl} - \delta^{il} M^{kj} - \delta^{kj} M^{il} + \delta^{jl} M^{ik}$ → sous-algèbre

Pour les M^{0i} entre eux :

$[M^{0i}, M^{0j}] = -M^{ij}$ $\quad (M^{00} = 0)$ $\quad$ pas une sous-algèbre et pour les mélanges :

$$[M^{0i}, M^{jk}] = -\delta^{ij}M^{0k} + \delta^{ik}M^{0j}$$

* Si on redéfinit les M^{ij} de la manière suivante :

$M^{ij} = \varepsilon^{ijk}T_k \quad \leftrightarrow \quad T_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}M^{jk} \quad , \quad T_i^{\dagger} = -T_i$

on trouve, après quelques calculs, $[T_i, T_j] = \varepsilon_{ijk}T_k$

→ la sous-algèbre générée par les T_i est isomorphe à $so(3) \simeq su(2)$. Ce n'est pas une surprise car en effet on a déjà identifié les transformations $\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & \\ & \tilde{\Lambda} \end{bmatrix}$ comme $\in SO(3)$.

* On va aussi appeler $M^{0i} \equiv B_i \quad , \quad B_i^{\dagger} = B_i$.

Leurs commutateurs sont les suivants :

$[B_i, B_j] = -\varepsilon_{ijk}T_k$

$[T_i, B_j] = \frac{1}{2}\varepsilon_{ikl}[M_{kl}, M_{0j}] = \frac{1}{2}\varepsilon_{ikl}(\delta_{jk}B_l - \delta_{jl}B_k)$

$\qquad = \varepsilon_{ijk}B_k$

* Donc les commutateurs définissant l'algèbre $so(1,3)$ sont $[T_i, T_j] = \varepsilon_{ijk}T_k \quad , \quad [T_i, B_j] = \varepsilon_{ijk}B_k \quad , \quad [B_i, B_j] = -\varepsilon_{ijk}T_k$

• si on définit ~~les~~ une nouvelle base (en termes de combinaisons linéaires avec coefficient complexes) :

$$T_i^{\pm} = \frac{1}{2}(T_i \pm iB_i)$$

alors on peut vérifier :

$$[T_i^\pm, T_j^\pm] = \frac{1}{4}\left([T_i \pm i B_i, T_j \pm i B_j]\right.$$

$$= \frac{1}{4}\left([T_i, T_j] \pm i [T_i, B_j] \pm i [B_i, T_j] - [B_i, B_j]\right)$$

$$= \frac{1}{4}\varepsilon_{ijk}\left(T_k \pm i B_k \pm i B_k + T_k\right) = \varepsilon_{ijk} T_k^\pm$$

et

$$[T_i^+, T_j^-] = \frac{1}{4}[T_i + i B_i, T_j - i B_j]$$

$$= \frac{1}{4}\varepsilon_{ijk}\left(T_k - i B_k + i B_k - T_k\right) = 0$$

→ les T_i^+ et les T_i^- génèrent 2 algèbres $so(3)$ qui commutent. On vérifie aussi que

$$(T_i^\pm)^\dagger = \frac{1}{2}\left(T_i^\dagger \pm (-i) B_i^\dagger\right) = \frac{1}{2}(-T_i \mp i B_i) = -T_i^\pm$$

mais aussi que $(T_i^+)^* = \frac{1}{2}(T_i^* - i B_i^*) = \frac{1}{2}(T_i - i B_i) = T_i^-$

→ on passe d'une sous-algèbre $so(3)$ à l'autre par conjugaison complexe.

On écrit donc $so(1,3) \simeq so(3) \oplus so(3)^*$.

- Notons finalement que $PT_i = T_i P$, $TT_i = T_i T$ tandis que $PB_i = -B_i P$ et $TB_i = -B_i T$ (mais bien sûr $PTB_i = B_i PT$). On a donc

$$PT_i^+ = P\frac{1}{2}(T_i + i B_i) = \frac{1}{2}(T_i - i B_i)P = T_i^- P$$ et de même pour T : l'action des 2 $so(3)$ est échangée par les opérateurs P et T.

(10) Le groupe $SL(2,\mathbb{C})$ et sa relation avec L

* Le groupe $SL(2,\mathbb{C})$ est le groupe des matrice 2×2 sur les complexes, de déterminant 1 :

$$S = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{C}) \quad \text{si} \quad \det S = 1 \leftrightarrow ad - bc = 1$$

on a déjà vu que c'est un groupe. Sa dimension est 6 (paramètres réels) : 4 paramètres complexes avec une relation, complexe elle aussi.

* Voyons tout de suite son algèbre, pour faire le lien avec le groupe de Lorentz. Si $S = \mathbb{1}_2 + \Omega$ on a $\det S = 1 + \mathrm{tr}\,\Omega + ..$ et donc $\det S = 1 \Leftrightarrow \mathrm{tr}\,\Omega = 0$; sur les complexes, $\mathrm{tr}\,\Omega = 0$ élimine aussi un paramètre complexe. Donc l'algèbre $sl(2,\mathbb{C})$ est générée par les matrices 2×2 complexes de trace nulle :

$$\Omega = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{bmatrix}$$

Une base pour de telles matrices est donnée par les matrices de Pauli, avec des coefficients complexes. Donc ~~pour~~ sur les réels, on a 6 générateurs dans cette base : $t_i = -\frac{i}{2}\tau_i$, $b_i = -\frac{1}{2}\tau_i$.

où $t_i^\dagger = -t_i$, $b_i^\dagger = b_i$ ($sl(2,\mathbb{C})$ est non compact).

* Les commutateurs sont les suivants :

$[t_i, t_j) = \varepsilon_{ijk} t_k$ comme pour $su(2)$

$[t_i, b_j) = \frac{i}{4}[\tau_i, \tau_j) = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\tau_k = \varepsilon_{ijk} b_k$

$[b_i, b_j) = \frac{1}{4}[\tau_i, \tau_j) = \frac{i}{2}\varepsilon_{ijk}\tau_k = -\varepsilon_{ijk} t_k$

→ on voit ~~tou~~ immédiatement qu'on a un isomorphisme $sl(2,\mathbb{C}) \simeq so(1,3)$.

* Attention, on a l'impression, en prenant ~~$t_i^- = \frac{1}{2}(t_i - ib_i)$~~

$t_i^- = \frac{1}{2}(t_i - ib_i) = \frac{1}{2}(-\frac{i}{2}\tau_i + \frac{i}{2}\tau_i) = 0$

qu'il y a un problème. En fait il n'y en a pas, le fait est que dans la représentation à 2 dimensions par laquelle on définit $SL(2,\mathbb{C})$, les t_i^- sont représentés trivialement. On reviendra sur cela quand on discutera les représentations.

* Étudier le groupe $SL(2,\mathbb{C})$ est donc intéressant et important pour le groupe de Lorentz.

Considérons donc une paramétrisation de $S \in SL(2,\mathbb{C})$ qui nous permette de comprendre sa structure globale, en particulier sa connexité. Prenons donc

$$S = \begin{bmatrix} z_1 + iz_2 & z_3 + iz_4 \\ -z_3 + iz_4 & z_1 - iz_2 \end{bmatrix}$$ de sorte à ce que $\det S = 1$

se lise $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 1$

- C'est une quadrique dans $\mathbb{C}^4$, tout à fait régulière.

prenons $z_i = x_i + i y_i$; l'équation complexe se écrit comme les 2 équations réelles :

$$x_i x_i = 1 + y_i y_i \quad , \quad x_i y_i = 0 \qquad i = 1..4$$

La solution générale se paramètrise de la façon suivante : on prends $m_i = \frac{x_i}{\sqrt{x_i x_i}}$ (à noter que $x_i x_i > 0$ par la 1ère équation)

m_i définit un point sur la sphère unité à 3 dimensions S^3.

Ensuite y_i est déterminé par $x_i y_i = 0 \Leftrightarrow m_i y_i = 0$, c'est à dire $y_i \in$ à l'espace tangent au point de S^3 déterminé par m_i. Cet espace tangent est un $\mathbb{R}^3$. Pour finir, le rayon de S^3 est fixé par $x_i x_i = 1 + y_i y_i$. L'espace des solutions des 2 équations est donc équivalent au fibré tangent de S^3, TS^3, qui est topologiquement $\mathbb{R}^3 \times S^3$ (car S^3 a un rayon minimal non nul). En tous cas, en ce qui concerne la connexité, ~~c'est~~ il est facile de voir que tout chemin fermé peut être contracté à un point, comme sur $S^3 \simeq SU(2)$.

* On peut se convaincre encore plus pratiquement que tout élément de $SL(2,\mathbb{C})$ est connexe à l'identité. On prend l'élément $S = \begin{pmatrix} z_1+iz_2 & z_3+iz_4 \\ -z_3+iz_4 & z_1-iz_2 \end{pmatrix}$

et on opère le changement $z_{2,3,4} \to z_{2,3,4}t$ avec $t\in[0,1]$; comme $\det S = 1$, à la place de z_1 on doit mettre $z_1 \to z_1(t) = \sqrt{1-(z_2^2+z_3^2+z_4^2)t^2}$ (à noter que si l'argument de la racine venait par passer par 0, si $z_1 \in \mathbb{R}^-$, il faudra prendre soin de choisir la bonne signe lorsqu'on contourne le chemin). On a donc $z_1(0)=1$, $z_1(1)=z_1$ et

$$S(t) = \begin{pmatrix} z_1(t)+iz_2t & z_3t+iz_4t \\ -z_3t+iz_4t & z_1(t)-iz_2t \end{pmatrix} \quad \text{vérifie } \det S(t) = 1 \ \forall t$$

et $S(0)=\mathbb{1}_2$, $S(1)=S$. Donc tout $S\in SL(2,\mathbb{C})$ est simplement connexe à l'identité.

* Comme $SU(2)$ est un sous groupe de $SL(2,\mathbb{C})$, pour trouver le centre de $SL(2,\mathbb{C})$ on peut partir en considérant le centre de $SU(2)$: $Z(SU(2))=\{\mathbb{1}_2,-\mathbb{1}_2\}$; or $-\mathbb{1}_2 \in SL(2,\mathbb{C})$ et commute avec tout $S\in SL(2,\mathbb{C})$, on a donc aussi

$$Z(SL(2,\mathbb{C})) = \{\mathbb{1}_2, -\mathbb{1}_2\} \cong \mathbb{Z}_2 .$$

* On cherche maintenant à trouver la relation entre $SL(2,\mathbb{C})$ et le groupe de Lorentz. Comme $SL(2,\mathbb{C})$ est connexe, tout homomorphisme de $SL(2,\mathbb{C})$ en L sera tel que $\operatorname{Im} \rho \subseteq L_+^\uparrow$ qui est aussi connexe à l'identité. On va procéder de manière très semblable à ce qu'on a fait pour $SU(2)$ et $SO(3)$.

* On considère donc les matrices 2×2 hermitiennes X. Par rapport au cas précédent, on ne les considère pas de trace nulle. On peut donc les paramétriser de la façon suivante : $X^\dagger = X \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} x^0+x^3 & x^1-ix^2 \\ x^1+ix^2 & x^0-x^3 \end{bmatrix}$

on peut aussi réécrire $X = x^\mu \sigma_\mu$ avec $\sigma_\mu = (\mathbb{1}_2, \tau_i)$

Notons enfin que $\det X = (x^0)^2-(x^3)^2-(x^1)^2-(x^2)^2 = x_\mu x^\mu$

* Pour tout $S \in SL(2,\mathbb{C})$, on a que $X' = SXS^\dagger$ est aussi hermitienne : $X'^\dagger = SX^\dagger S^\dagger = SXS^\dagger = X'$, et est telle que $\det X' = \det S \det X (\det S)^* = \det X$.

Donc on peut aussi écrire $X' = x'^\mu \sigma_\mu$, et on aura $x'_\mu x'^\mu = x_\mu x^\mu$. On a en conséquence une relation $x'^\mu = \rho(S)^\mu{}_\nu x^\nu$ avec $\rho(S)^\mu{}_\nu \in L_+^\uparrow$; on a donc fin défini $\rho : SL(2,\mathbb{C}) \to L_+^\uparrow : S \to \rho(S)$.

* On peut donc écrire

$$x'^\mu \sigma_\mu = \rho(\Lambda)^\mu{}_\nu x^\nu \sigma_\mu = S x^\nu \sigma_\nu S^\dagger \qquad \forall x^\mu \in \mathbb{R}^{1,3}$$

et donc $\rho(\Lambda)^\mu{}_\nu \sigma_\mu = S \sigma_\nu S^\dagger$

En définissant $\bar{\sigma}_\mu = (\mathbb{1}_2, -\tau_i)$ telles que $\bar{\sigma}^\mu = (\mathbb{1}_2, \tau_i)$ on a $\mathrm{tr}\, \bar{\sigma}^\mu \sigma_\nu = 2\delta^\mu_\nu$, et enfin

$\rho(\Lambda)^\mu{}_\nu = \frac{1}{2} \mathrm{tr}\, \bar{\sigma}^\mu S \sigma_\nu S^\dagger$. On peut ainsi montrer, comme pour $\rho : SU(2) \to SO(3)$, que ρ est bien un homomorphisme.

* Si on prend $S = e^{i\frac{\varphi}{2}\tau_3} = \begin{bmatrix} e^{i\varphi/2} & \\ & e^{-i\varphi/2} \end{bmatrix} \in SU(2)$, on génère de la même manière que montré précédemment, une rotation dans le plan x^1, x^2 (x^0 n'est pas affecté par $\rho(S)$, de même que x^3) :

$$\rho(S) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \cos\varphi & \sin\varphi & \\ & -\sin\varphi & \cos\varphi & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

* Si par contre on prend $S = e^{\frac{t}{2}\tau_3} \notin SU(2)$

$S = \begin{bmatrix} e^{t/2} & \\ & e^{-t/2} \end{bmatrix}$, on trouve :

$$X' = \begin{bmatrix} e^{t/2} & \\ & e^{-t/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0+x^3 & x^1-ix^2 \\ x^1+ix^2 & x^0-x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{t/2} & \\ & e^{-t/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t(x^0+x^3) & x^1-ix^2 \\ x^1+ix^2 & e^{-t}(x^0-x^3) \end{bmatrix}$$

$\rightarrow x^1$ et x^2 sont inchangés, par contre

$$x'^0 + x'^3 = e^{t}(x^0 + x^3)$$
$$x'^0 - x'^3 = e^{-t}(x^0 - x^3)$$

$$\Leftrightarrow \quad x'^0 = \mathrm{ch}\,t\, x^0 + \mathrm{sh}\,t\, x^3$$
$$x'^3 = \mathrm{sh}\,t\, x^0 + \mathrm{ch}\,t\, x^3$$

et donc $\quad f(S) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,t & \cancel{\mathrm{sh}\,t} & & \mathrm{sh}\,t \\ \cancel{\mathrm{sh}\,t} & \cancel{\mathrm{ch}\,t}\ 1 & & \\ & & 1 & \\ \mathrm{sh}\,t & & & \mathrm{ch}\,t \end{pmatrix}$ boost le long de x^3.

* On se convainc donc que $\mathrm{Im} f = L_+^\uparrow$, toutes les transformations de Lorentz connexes à l'identité ont une préimage dans $SL(2,\mathbb{C})$.

* On $Z(L_+^\uparrow) = \{\mathbb{1}_4\}$ tandis que $Z(SL(2,\mathbb{C})) = \{\mathbb{1}_2, -\mathbb{1}_2\}$ et en particulier, pour $S = -\mathbb{1}_2$ $X' = X$, donc $f(-\mathbb{1}_2) = \mathbb{1}_4$. On peut facilement montrer que $\ker f = Z(SL(2,\mathbb{C})) = Z(SU(2)) = \{\mathbb{1}_2, -\mathbb{1}_2\} = \mathbb{Z}_2$.

On a donc pour finir montré que

$$L_+^\uparrow = \frac{SL(2,\mathbb{C})}{\mathbb{Z}_2}.$$

On en conclut que $L_+^\uparrow$ n'est pas simplement connexe, de la même manière que $SO(3)$.

(11) Représentations du groupe de Lorentz

* Comme pour le groupe des rotations, on commence par discuter les représentations de l'algèbre. Ici on a $so(1,3) \simeq so(3) \oplus so(3)^*$ et donc il est clair qu'on construira les représentations de $so(1,3)$ à partir de celles de $so(3) \simeq su(2)$ étudiées précédemment.

* En fait, on a construit les représentations de dimension finie de $su(2)$. Ici on prendra des produits tensoriels de telles représentations, pour les 2 facteurs $su(2)$. Ainsi, on construira des représentations de dimension finie de $so(1,3)$. Cependant, il faudra remarquer que ces représentations ne sont pas unitaires, essentiellement à cause du caractère non compact de $so(1,3)$ qui se traduit par le fait qu'un sous ensemble de ses générateurs sont hermitiens et pas anti-hermitiens (et on obtient $so(1,3) \simeq so(3) \oplus so(3)^*$ en prenant des combinaisons à coefficient complexes des générateurs).

* Une représentation finie de $so(1,3)$ sera donc le produit tensoriel d'une représentation D_j^+ de $su(2)$ généré par T_i^+ avec une représentation $D_{j'}^-$ de $su(2)$ généré par T_i^- : $D_j^+ \otimes D_{j'}^- \equiv (j, j')$ [notation plus compacte]. Sa dimension est $(2j+1)\cdot(2j'+1)$ et elle est irréductible. Notons que comme $(T_i^\pm)^* = T_i^\mp$, on a que $(j,j')^* = (j',j)$. Ainsi les représentations telles que $j=j'$ sont réelles.

* Les générateurs T_i et B_i sont représentés simplement comme $T_i = T_i^+ + T_i^-$ et $B_i = \frac{1}{i}(T_i^+ - T_i^-)$
[on omet $T(x)$ pour écrire les représentations, pour éviter toute confusion avec les générateurs, appelés T_i eux aussi.]

* À noter que les T_i génèrent la sous algèbre $so(3)_R$ qui correspond aux rotations d'espace $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^{1,3}$. On note souvent cette sous algèbre comme "diagonale" par rapport à la somme directe $so(3) \oplus so(3)^*$. Les représentations de cette sous algèbre se comportent comme le produit direct des représentations j et j' : pour une rep. irréductible (j,j') de $so(1,3)$, on a la représentation $r = j \otimes j' = (j+j') \oplus \ldots \oplus |j-j'|$ de $so(3)_R$, en général réductible donc.

* On passe au groupe par exponentiation. Dans le cas de $SL(2,\mathbb{C})$, c'est direct car le groupe est simplement connexe. Pour $L_+^\uparrow \simeq \frac{SL(2,\mathbb{C})}{\mathbb{Z}_2}$ qui est connexe à l'identité mais pas simplement connexe, il faut faire le tri, comme pour $SO(3) \simeq \frac{SU(2)}{\mathbb{Z}_2}$.

* Un vecteur de la représentation (j,j') est ~~la~~ déterminé par ses valeurs propres m et m' sous $i T_3^+$ et $i T_3^-$.
Sa valeur propre sous $i T_3 = J_3$ est donc $m+m'$.
L'élément du groupe $e^{\theta T_3}$ est donc représenté par une matrice diagonale dont les éléments sont $e^{-i(m+m')\theta}$; $\theta = 2\pi$ est représenté par l'identité ssi $m+m' \in \mathbb{Z}$ $\forall m, m'$ $\Leftrightarrow$ $j, j' \in \mathbb{Z}$ ou $j, j' \in \mathbb{Z}+\frac{1}{2}$.
$\Leftrightarrow$ $j+j' \in \mathbb{Z}$. Ceci sont les représentation de $SL(2,\mathbb{C})$ qui sont aussi des représentations de $L_+^\uparrow$.

* On va à présent passer en revue quelques représentations.
Commençons par la plus petite : $(j,j') = (\frac{1}{2}, 0)$.
Elle est de dimension 2. $\rightarrow$ elle correspond donc à des matrices 2×2 $\rightarrow$ c'est la représentation identique de $SL(2,\mathbb{C})$. On note ses vecteurs ξ_α, avec $\alpha = 1, 2$.

* À noter que, comme on a déjà remarqué, dans cette représentation $t_i^+ \equiv t_i$ alors que $t_i^- = 0$. C'est normal : les t_i^+ représentent $su(2) \subset sl(2,\mathbb{C})$ dans la représentation $j=\frac{1}{2}$ de dimension 2 ; alors que les t_i^- représentent $su(2)^*$ dans la représentation triviale $j=0$ de dimension 1.

* En fait on a une autre représentation de dimension 2, il s'agit de $(0,\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2},0)^*$. Celle-ci est telle que $t_i^+ = 0$ et $t_i^- \equiv t_i$. On note les vecteurs de cette représentation $\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}$, $\dot{\alpha}=1,2$ (notation utilisée surtout en supersymétrie!). Comme ~~(0,~~ $(0,\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2},0)^*$ on a que $\bar{\xi}_{\dot{\alpha}} = (\xi_\alpha)^*$.

* On appelle un objet se transformant sous $(\frac{1}{2},0)$ ou $(0,\frac{1}{2})$ un <u>spineur de Weyl</u>, <u>gauche</u> pour $(\frac{1}{2},0)$ et <u>droit</u> pour $(0,\frac{1}{2})$ (convention motivée par la suite!); ce sont les représentations fondamentales de $so(1,3)$.

* Tant les spineurs de Weyl gauches que droits se transforment sous la représentation $j=\frac{1}{2}$, aussi de dimension 2, sous la sous-algèbre des rotations spatiales.

* Si on a 2 objets ξ_α et χ_α dans la représentation $(\frac{1}{2},0)$, leur produit est dans la représentation produit tensoriel $(\frac{1}{2},0)\otimes(\frac{1}{2},0) = (\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2}, 0\otimes 0)$

$$= (1\oplus 0, 0) = (1,0)\oplus(0,0).$$

On a donc un élément invariant dans le produit, $(0,0)$. On l'écrit $\xi^\alpha \chi_\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta}\xi_\beta \chi_\alpha$ avec $\varepsilon^{\alpha\beta} = -\varepsilon^{\beta\alpha}$, $\varepsilon^{12}=1$, le tenseur de Levi-Civita à 2 dimensions (l'espace de la représentation).

On a la même chose pour $\bar\xi_{\dot\alpha}, \bar\chi_{\dot\alpha} \in (0,\frac{1}{2})$.

[On peut voir à quoi correspond la représentation irréductible $(1,0)$ aux exercices...].

* La représentation $(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \equiv (\frac{1}{2},0)\otimes(0,\frac{1}{2})$ est irréductible ~~et~~, de dimension $2\times 2=4$, et réelle. Ceci suffit pour l'identifier comme la représentation définissant $SO(1,3)$. [La seule autre représentation irréductible de dimension 4 est $(3/2,0)$, qui n'est pas réelle.]

* Un vecteur de cette représentation peut être écrit comme $v_{\alpha\dot\alpha}$, une matrice 2×2 qui peut être décomposée dans la base $(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\alpha}$:

$$v_{\alpha\dot\alpha} = \sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha} v_\mu$$

Comme on l'a vu, les v_μ se transforment comme un vecteur de $L_+^\uparrow$ (après exponentiation).
On obtient les v_μ à partir des $v_{\alpha\dot\alpha}$ par

$$v^\mu = \frac{1}{2}(\bar\sigma^\mu)^{\dot\alpha\alpha} v_{\alpha\dot\alpha}$$

* Pour la sous-algèbre des rotations spatiales, on a que le quadrivecteur $v_{\alpha\dot\alpha}$ est dans la représentation réductible $\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2} = 1 \oplus 0$: la représentation à 3 dimensions est donnée par les composantes spatiales v_i, tandis que la représentation scalaire (invariante) est donnée par la composante temporelle v_0.

* Rappelons nous finalement que $P = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$ agit sur les $T_i^\pm$ en les échangeant : $P T_i^\pm = T_i^\mp P$.
Ceci est vrai dans la représentation définissant L (en particulier $L^\uparrow = L_+^\uparrow \cup P L_+^\uparrow$). Une représentation de $L^\uparrow$ se doit donc de représenter aussi cette propriété de P.
On notera tout de suite que $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, ainsi que toute représentation (j,j), représente P trivialement, c'est à dire que pour tout vecteur μ de la représentation, $P\mu$ appartient automatiquement au même espace de la représentation.

* Dans le cas de la représentation $(\frac{1}{2},0)$ par contre, on a que $P\xi$ se transforme comme $(0,\frac{1}{2})$.
La seule façon d'avoir une représentation de spin $\frac{1}{2}$ de $L^\uparrow$ c'est de considérer la représentation $(\frac{1}{2},0)\oplus(0,\frac{1}{2})$ (réductible pour $SL(2,\mathbb{C})$). On appelle cette représentation de dimension 4 <u>spineur de Dirac</u>.
On peut l'écrire comme un vecteur colonne composé de 2 vecteurs à 2 composantes : $\Psi = \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \bar{\chi}_{\dot\alpha} \end{pmatrix}$.

* ~~De~~ Il en va de même pour toute représentation (j,j') avec $j \neq j'$, pour avoir une représentation de $L^\uparrow$ il faut prendre $(j,j')\oplus(j',j)$.

[À proprement parler, quand $j+j' \in \mathbb{Z}^+ + \frac{1}{2}$, ~~il ne s'agit~~ comme dans le cas du spineur de Dirac, il ne s'agit pas d'une représentation de $L^\uparrow$, mais d'un "recouvrement" de $L^\uparrow$, qui représente fidèlement P].

12 Le groupe de Poincaré

* Avec le groupe de Lorentz, on a considéré des transformations qui préservent la norme minkowskienne de $x^\mu \in \mathbb{R}^{1,3}$. À présent, on va élargir le groupe et considérer des transformations qui préservent la norme de la distance minkowskienne entre x_1^μ et $x_2^\mu \in \mathbb{R}^{1,3}$:

$$(x_1^\mu - x_2^\mu)(x_{1\mu} - x_{2\mu}) = (x_1'^\mu - x_2'^\mu)(x'_{1\mu} - x'_{2\mu}) .$$

* On permet donc des translations par des quadrivecteurs :

$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + a^\mu$ et donc, en toute généralité, on aura $x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$ qu'on écrira aussi sans indices : $x \to x' = \Lambda x + a$.

* À noter que les translations T sont un groupe continu abélien à 4 paramètres ; il s'agit simplement de 4 répliques du groupe $\mathbb{R},+$.

* On va appeler $\mathcal{P}$ le groupe de Poincaré et dénoter ses élément par des couples $(\overset{\in \mathcal{L}}{\Lambda}, \overset{\in T}{a})$. La loi de groupe est la suivante : si $x'' = \Lambda_1 x' + a_1$ et $x' = \Lambda_2 x + a_2$ alors $x'' = \Lambda_1 \Lambda_2 x + \Lambda_1 a_2 + a_1$.

Donc $(\Lambda_1, a_1) \cdot (\Lambda_2, a_2) = (\Lambda_1 \Lambda_2, \Lambda_1 a_2 + a_1)$

* C'est bien un groupe car $(\Lambda_1\Lambda_2, \Lambda_1 a_2 + a_1) \in \mathcal{P}$ ($\Lambda_1 a_2 + a_1$ est un quadrivecteur, donc $\in T$, et $\Lambda_1\Lambda_2 \in L$)

L'identité est $(\mathbb{1}, 0)$:

$$(\mathbb{1}, 0)(\Lambda, a) = (\mathbb{1}\Lambda, \mathbb{1}\cdot a + 0) = (\Lambda, a)$$
$$(\Lambda, a)(\mathbb{1}, 0) = (\Lambda\cdot\mathbb{1}, \Lambda\cdot 0 + a) = (\Lambda, a)$$

L'inverse est $(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$:

$$(\Lambda, a)(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a) = (\Lambda\Lambda^{-1}, -\Lambda\Lambda^{-1}a + a) = (\mathbb{1}, 0)$$
$$(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)(\Lambda, a) = (\Lambda^{-1}\Lambda, \Lambda^{-1}a - \Lambda^{-1}a) = (\mathbb{1}, 0)$$

* On remarque qu'on écrit les éléments de $\mathcal{P}$ comme pour un produit direct $G_1 \times G_2$, avec des éléments (g_1, g_2). Or ici la loi de groupe est plus compliquée : il s'agit en fait d'un <u>produit semi-direct</u> et on le dénote, pour le cas présent, $\mathcal{P} = L \ltimes T$.
En gros, les éléments du premier facteur interviennent dans le produit des élément du deuxième facteur.

* On se rappellera que pour un produit direct, les propriétés suivantes sont vraies :
  - G_1 et G_2 sont des sous groupes invariants (normaux) de $G_1 \times G_2$ (car tous les éléments de G_1 commutent avec tous les éléments de G_2, et vice-versa)
  - $G_1 \cap G_2 = \{e\} \equiv \{(e,e)\}$

- tout élément de $G_1 \times G_2$ peut s'écrire comme le produit d'un élément de G_1 et d'un élément de G_2 : $(g_1, g_2) = (g_1, e) \cdot (e, g_2)$ trivialement.

* déf : Un groupe G est un produit semi-direct $G_1 \ltimes G_2$ de 2 groupes G_1 et G_2 si
   - G_2 est un sous groupe invariant (normal) de G
   - $G_1 \cap G_2 = \{e\}$
   - tout élément de G peut s'écrire comme $g_1 g_2$, avec $g_1 \in G_1$ et $g_2 \in G_2$.

* Pour $\mathcal{P}$, on a que T est un sous groupe normal :

$$(\Lambda, a)(\mathbb{1}, b)(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a) = (\Lambda, a)(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a + b)$$
$$= (\mathbb{1}, -a + \Lambda b + a) = (\mathbb{1}, \Lambda b) \in T$$

mais L ne l'est pas :

$$(\Lambda, a)(\tilde{\Lambda}, 0)(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a) = (\Lambda, a)(\tilde{\Lambda}\Lambda^{-1}, -\tilde{\Lambda}\Lambda^{-1}a)$$
$$= (\Lambda\tilde{\Lambda}\Lambda^{-1}, -\Lambda\tilde{\Lambda}\Lambda^{-1}a + a) \notin L$$
$$\text{car } \Lambda\tilde{\Lambda}\Lambda^{-1} = \mathbb{1} \Leftrightarrow \tilde{\Lambda} = \mathbb{1}$$

* Par contre, il est évident que $L \cap T = \{(\mathbb{1}, 0)\}$ et que $(\Lambda, a) = (\mathbb{1}, a)(\Lambda, 0) = (\Lambda, 0)(\mathbb{1}, \Lambda^{-1}a)$

Donc $\mathcal{P} = L \ltimes T$

* On considère à présent l'algèbre de Poincaré, c'est à dire les éléments proches de l'identité. Au lieu de procéder par le biais d'une représentation matricielle pour trouver les relations de commutation, on va considérer l'action sur x^μ. (C'est une méthode qui est souvent utilisée en théorie des champs.)

* On définit la variation de x^μ sous une transformation infinitésimale de la façon suivante :

  Si $x \to x' = \Lambda x + a$ on a $\delta x = x' - x$

  et si de plus $\Lambda = \mathbb{1} + \omega$ alors $\delta x = \omega x + a$;

  on a déjà vu que L a 6 générateurs $\Pi^{\lambda\nu}$, on va donc écrire $\omega x = \frac{1}{2}\omega_{\lambda\nu}\Pi^{\lambda\nu} x$

  (le $\frac{1}{2}$ est dû au fait que $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ et $\Pi^{\lambda\nu} = -\Pi^{\nu\lambda}$).

  De même, on va définir $a = a_\mu P^\mu x$

  avec donc P^μ les générateurs de T (cette définition est équivalente à $P_\mu = \partial_\mu$)

  On peut donc réécrire $\delta x = \left(\frac{1}{2}\omega_{\lambda\nu}\Pi^{\lambda\nu} + a_\mu P^\mu\right)x$

* Si on applique 2 transformations infinitésimales de suite, on obtient

$$\delta_1\delta_2 x = x'' - x = (\mathbb{1}+\omega_1)(\mathbb{1}+\omega_2)x + (\mathbb{1}+\omega_1)a_2 + a_1 - x$$
$$= (\omega_1 + \omega_2 + \omega_1\omega_2)x + a_1 + a_2 + \omega_1 a_2$$

Le commutateur de 2 transformations infinitésimales est donc

$$[\delta_1, \delta_2] x = (\omega_1\omega_2 - \omega_2\omega_1) x + \omega_1 a_2 - \omega_2 a_1$$

$$\equiv \omega_{12} x + a_{12} \qquad \text{avec} \qquad \omega_{12} = [\omega_1, \omega_2]$$
$$a_{12} = \omega_1 a_2 - \omega_2 a_1$$

* Ceci étant vrai pour tout x, la relation peut être écrite en termes des générateurs :

$$\left[\tfrac{1}{2}\omega_{1\mu\nu}\Pi^{\mu\nu} + a_{1\mu}P^\mu, \tfrac{1}{2}\omega_{2\rho\sigma}\Pi^{\rho\sigma} + a_{2\rho}P^\rho\right] =$$

$$= \frac{1}{2}(\omega_{1\alpha}{}^{\gamma}\omega_{2\gamma\beta} - \omega_{2\alpha}{}^{\gamma}\omega_{1\gamma\beta})\Pi^{\alpha\beta} + (\omega_{1\alpha\beta}a_2^\beta - \omega_{2\alpha\beta}a_1^\beta)P^\alpha$$

et il ne nous reste qu'à identifier les termes des 2 côtés :

$$\frac{1}{4}\omega_{1\mu\nu}\omega_{2\rho\sigma}[\Pi^{\mu\nu}, \Pi^{\rho\sigma}] + \frac{1}{2}\omega_{1\mu\nu}a_{2\rho}[\Pi^{\mu\nu}, P^\rho] + \frac{1}{2}a_{1\mu}\omega_{2\rho\sigma}[P^\mu, \Pi^{\rho\sigma}]$$
$$+ a_{1\mu}a_{2\rho}[P^\mu, P^\rho] = \frac{1}{2}\omega_{1\mu\nu}\omega_{2\rho\sigma}(\Pi^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho} - \Pi^{\rho\nu}\eta^{\mu\sigma})$$
$$+ (\omega_{1\mu\nu}a_{2\rho} - \omega_{2\mu\nu}a_{1\rho})P^\mu\eta^{\nu\rho}$$

On voit tout de suite que $[P^\mu, P^\rho] = 0$ car il n'y a pas de termes en $a_1 a_2$ à droite.
Ensuite on se rappelle que $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ et donc on antisymétrise ce qui le multiplie.

On obtient

$$\frac{1}{4}\omega_{1\mu\nu}\omega_{2\rho\sigma}[\Pi^{\mu\nu},\Pi^{\rho\sigma}] + \frac{1}{2}(\omega_{1\mu\nu}a_{2\rho}-\omega_{2\mu\nu}a_{1\rho})[\Pi^{\mu\nu},P^{\rho}]$$

$$= \frac{1}{4}\omega_{1\mu\nu}\omega_{2\rho\sigma}\left(\Pi^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}-\Pi^{\nu\sigma}\eta^{\mu\rho}-\Pi^{\rho\nu}\eta^{\mu\sigma}+\Pi^{\rho\mu}\eta^{\nu\sigma}\right)$$

$$+\frac{1}{2}(\omega_{1\mu\nu}a_{2\rho}-\omega_{2\mu\nu}a_{1\rho})\left(P^{\mu}\eta^{\nu\rho}-P^{\nu}\eta^{\mu\rho}\right)$$

* Les relations de commutations sont donc :

$$[\Pi^{\mu\nu},\Pi^{\rho\sigma}] = -\Pi^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}+\Pi^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}+\Pi^{\nu\rho}\eta^{\mu\sigma}-\Pi^{\nu\sigma}\eta^{\mu\rho} \qquad \text{(Lorentz)}$$

$$[\Pi^{\mu\nu},P^{\rho}] = P^{\mu}\eta^{\nu\rho}-P^{\nu}\eta^{\mu\rho}$$

$$[P^{\mu},P^{\rho}] = 0$$

On a donc redérivé l'algèbre de Lorentz, et trouvé la loi de commutation des algèbres de L avec T.

* En fait $[\Pi,P]\propto P$ nous renseigne que les générateurs P^{μ} de T sont dans la représentation vectorielle de L (de dim. 4 donc). C'est attendu que les P^{μ} soient dans une représentation de L car au niveau du groupe, la structure de produit semi-direct impose que les éléments de L agissent sur les éléments de T. T doit donc être dans une représentation de L.

* De même, on peut interpréter les commutateurs de L en disant que les générateurs $M^{\mu\nu}$ sont dans la représentation adjointe de L.

* Par exponentiation des éléments de l'algèbre, on obtient les éléments de P connexes à l'identité. Comme T est trivialement connexe à l'identité, on obtient donc le sous groupe $P_+^\uparrow = L_+^\uparrow \ltimes T$

* Si on veut permettre des représentations de spin demi-entier du sous groupe des rotations, on va passer au recouvrement simplement connexe de $L_+^\uparrow$, à savoir $SL(2,\mathbb{C})$. On définit donc $\bar{P}_+^\uparrow = SL(2,\mathbb{C}) \ltimes T$.

* En pratique, on ne va pas s'intéresser aux éléments de P non connexes à l'identité, on écrira donc P même si en principe on sous-entend $P_+^\uparrow$ ou $\bar{P}_+^\uparrow$ selon le contexte (le spin!).

(13) Représentations du groupe de Poincaré

* On va déterminer les représentations de $\mathcal{P}$ qui ont un intérêt physique, on va donc demander qu'elles soient unitaires. Comme on le verra, les vecteurs propres d'une représentation de $\mathcal{P}$ ont, entre autres, une impulsion (valeur propre de P_μ) déterminée. C'est naturel de les associer à des états physiques de particules, et pour que $\mathcal{P}$ agisse sur un espace d'Hilbert bien défini (de norme positive), la représentation doit être unitaire, même au prix d'être de dimension infinie, car $\mathcal{P}$ est non compacte.

* Ceci est en contraste avec les représentations finies non unitaires du groupe de Lorentz vues précédemment. Ces dernières sont d'intérêt pour les champs (associés aux particules), qui dépendent de l'espace temps (et ne sont donc pas des vecteurs propres de P_μ) et ont un nombre fini de composantes, lié au nombre de degrés de liberté (celui-ci dépend des équations du mouvement – plus de détails dans les cours de théorie quantique des champs!)

* On va profiter de la structure en produit semi-direct de $\mathcal{P}$ pour construire les représentations à partir d'un ensemble minimal de données. On appelle cette procédure la méthode des représentations induites.

* On part donc du sous-groupe normal T de $\mathcal{P}$. Comme T est abélien, ses représentations unitaires irréductibles sont toutes de dimension un. Elles sont spécifiées par les valeurs propres de P^μ qui sont donc imaginaires vu qu'on prend P^μ antihermitien dans une représentation unitaire :

$$P^\mu \psi_p = i p^\mu_\mu \psi_p$$

(Notons que le plus souvent en physique, on prend des générateurs hermitiens $\tilde{P}^\mu = -iP^\mu$ tels que $\tilde{P}^\mu \psi_p = p^\mu \psi_p$. C'est bien entendu purement conventionnel.)

* Cependant, comme les P^μ ne commutent pas avec les générateurs $\Lambda^{\mu\nu}$ de L, les valeurs propres p^μ ne peuvent pas caractériser une représentation de $\mathcal{P}$. Néanmoins, on peut construire à partir des P^μ un opérateur de Casimir qui commute avec

tout élément dans l'algèbre de $\mathcal{P}$: il s'agit de $P^2 = P_\mu P^\mu$.

* En effet, trivialement $[P^2, P^\mu] = 0$ car $[P^\mu, P^\nu] = 0$.

Ensuite, $[P^2, M^{\mu\nu}] = P_\rho [P^\rho, M^{\mu\nu}] + [P^\rho, M^{\mu\nu}] P_\rho$

$$= P_\rho\left(-P^\mu \eta^{\rho\nu} + P^\nu \eta^{\mu\rho}\right) + \left(-P^\mu \eta^{\rho\nu} + P^\nu \eta^{\mu\rho}\right) P_\rho$$

$$= 2\left(-P^\mu P^\nu + P^\nu P^\mu\right) = 0$$

Donc la valeur propre de $P^2 = -p^2 = -p_\mu p^\mu = -(p^0)^2 + (p^i)^2 = -m^2$, la masse invariante, caractérise une représentation de $\mathcal{P}$.

* Notons d'abord qu'en agissant avec une transformation de Lorentz sur ψ_p on obtient bien un autre vecteur propre de P^μ. Pour ce faire, notons génériquement $t(\Lambda, a)$ la représentation de $\mathcal{P}$ sur les ψ_p.

L'expression pour ψ_p est un vecteur propre des éléments de T est le suivant : $t(\mathbb{1}, a)\psi_p = e^{a_\mu P^\mu}\psi_p = e^{ia\cdot p}\psi_p$

où $a \cdot p = a_\mu p^\mu = a^\mu \eta_{\mu\nu} p^\nu = a^T \eta p$

On se demande alors quelle est la valeur propre de $t(\Lambda, 0)\psi_p$:

$$t(\mathbb{1}, a)\, t(\Lambda, 0)\psi_p = t(\Lambda, a)\psi_p = t(\Lambda, 0)\, t(\mathbb{1}, \Lambda^{-1}a)\psi_p$$

$$= t(\Lambda, 0)\, e^{i\Lambda^{-1}a\cdot p}\psi_p = e^{ia\cdot \Lambda p}\, t(\Lambda, 0)\psi_p$$

où on a utilisé

$$\Lambda^{-1}a\cdot p = (\Lambda^{-1}a)^T\eta p = a^T(\Lambda^{-1})^T\eta p = a^T\eta\Lambda p = a\cdot\Lambda p \quad ;$$

$\hookrightarrow \Lambda^T\eta\Lambda = \eta$

on a donc que $t(\Lambda,0)\psi_p \propto \psi_{\Lambda p}$

* Pour tout p on peut définir les $\Lambda \in L$ tels que $\Lambda p = p$. Ils forment de manière évidente un sous groupe de L, appelé ~~Λ_p~~ "<u>petit groupe</u>" et dénoté L_p. À noter que si $\Lambda \in L_p$, $t(\Lambda,0)\psi_p$ est toujours un vecteur propre de valeur propre p^μ, mais pas nécessairement le même. En fait, pour chaque p^μ, on peut avoir une dégénérescence donnée par des indices λ, on aura $\psi^{\#}_{p,\lambda}$; donc en général

si $\Lambda \in L_p$ $\quad t(\Lambda,0)\psi^{\#}_{p,\lambda} = t^{\lambda'}_{\lambda}\,\psi^{\#}_{p,\lambda'}$

avec $t^{\lambda'}_{\lambda}$ une matrice qui représente l'élément du petit groupe sur les $\psi^{\#}_{p,\lambda}$.

Il est donc important de trouver le petit groupe pour tout p, de sorte à déterminer ses représentations.

* Si $p' = \bar{\Lambda} p \neq p$, on a néanmoins que $L_{p'} \simeq L_p$. En effet, si $\Lambda p = p$ ~~alors~~ alors $\Lambda \in L_p$, et si $\Lambda' p' = p'$ alors $\Lambda' \in L_{p'}$, on a que

$$\Lambda' \bar{\Lambda} p = \bar{\Lambda} p \iff \bar{\Lambda}^{-1} \Lambda' \bar{\Lambda} p = p \quad \text{donc } \forall \Lambda' \in L_{p'},$$

$\bar{\Lambda}^{-1} \Lambda' \bar{\Lambda} \in L_p$ et on a donc $L_p = \bar{\Lambda}^{-1} L_{p'} \bar{\Lambda}$ ou $L_{p'} = \bar{\Lambda} L_p \bar{\Lambda}^{-1}$. Les deux sous groupes L_p et $L_{p'}$ sont conjugués par un élément de L et sont donc isomorphes.

* En conséquence, comme $\forall \Lambda \in L$ Λp conserve la norme p^2 de p, les petits groupes L_p sont classés par le <u>type</u> de p, c'est à dire le signe de sa norme p^2. (On peut facilement se convaincre que la valeur absolue de p^2 n'affecte pas la structure de L_p, du moment que $\Lambda p = p$ est invariant sous $p \to \lambda p$.)

* On va étudier les cas physiques $p^2 > 0$ et $p^2 = 0$ en succession.

* Pour construire une représentation de $\mathcal{P}$, on fixe d'abord une valeur propre p_0^μ du type souhaité, et on se donne les vecteurs propres correspondants $\Psi_{p_0,\lambda}^{\mu}$, qui se transforment dans une représentation unitaire finie du petit groupe L_0 : $\forall \Lambda \in L_0$ ssi ($\Lambda p_0 = p_0$),

$$t(\Lambda,0)\Psi_{p_0,\lambda}^{\mu} = t_0(\Lambda)^{\lambda'}{}_{\lambda}\Psi_{p_0,\lambda'}^{\mu}$$

* Tous les autres vecteurs de la représentation sont obtenus en agissant avec des éléments de $\mathcal{P}$ sur les $\Psi_{p_0,\lambda}^{\mu}$. Comme on peut écrire $(\Lambda,a) = (\Lambda,0)\cdot(\mathbb{1},\vec{a})$ et que $\Psi_{p_0}^{\lambda}$ est un vecteur propre de tous $(\mathbb{1},\vec{a})$, il suffit d'agir avec $t(\Lambda,0)$ sur $\Psi_{p_0,\lambda}^{\mu}$, ce qu'on a déjà fait. Si donc $p = \Lambda_p p_0$ alors on définit
$\Psi_{p,\lambda}^{\mu} = t(\Lambda_p,0)\Psi_{p_0,\lambda}^{\mu}$.

* Il reste à montrer que les $\Psi_{p,\lambda}^{\mu}$ forment bien une base d'une représentation unitaire de $\mathcal{P}$.

On agit avec Λ sur $\Psi_{p,\lambda}^{\mu}$, et on écrit $p' = \Lambda p$:

$$t(\Lambda,0)\Psi_{p,\lambda}^{\mu} = t(\Lambda,0)\,t(\Lambda_p,0)\Psi_{p_0,\lambda}^{\mu} = t(\Lambda\Lambda_p,0)\Psi_{p_0,\lambda}^{\mu}$$

or on a $\Lambda p' = \Lambda_{p'} p_0 = \Lambda p = \Lambda\Lambda_p p_0 \rightarrow \Lambda_{p'}^{-1}\Lambda\Lambda_p p_0 = p_0$

$$\rightarrow \Lambda_{p'}^{-1}\Lambda\Lambda_p = \Lambda_0 \in L_0 \quad \rightarrow \quad \Lambda\Lambda_p = \Lambda_{p'}\Lambda_0$$

$$t(\Lambda,0)\Psi_{p,\lambda}^{\mu} = t(\Lambda_{p'}\Lambda_0,0)\Psi_{p_0,\lambda}^{\mu} = t(\Lambda_{p'},0)\,t(\Lambda_0,0)\Psi_{p_0,\lambda}^{\mu}$$
$$= t(\Lambda_{p'},0)\,t_0(\Lambda_0)^{\lambda'}{}_{\lambda}\Psi_{p_0,\lambda'}^{\mu} = t_0(\Lambda_0)^{\lambda'}{}_{\lambda}\,t(\Lambda_{p'},0)\Psi_{p_0,\lambda'}^{\mu}$$

et donc pour finir

$$t(\Lambda,0)\,\psi_{p,\lambda} = t_0(\Lambda_{p'}^{-1}\Lambda\Lambda_p)^{\lambda'}{}_{\lambda}\,\psi_{p',\lambda'}$$

* On peut se convaincre facilement qu'il s'agit bien d'une représentation :

$$t(\Lambda_1,0)t(\Lambda_2,0)\psi_{p,\lambda} = t(\Lambda_1,0)\,t_0(\Lambda_{p_2}^{-1}\Lambda_2\Lambda_p)^{\lambda_2}{}_{\lambda}\,\psi_{p_2,\lambda_2}$$

$$= t_0(\Lambda_{p_1}^{-1}\Lambda_1\Lambda_{p_2})^{\lambda_1}{}_{\lambda_2}\,t_0(\Lambda_{p_2}^{-1}\Lambda_2\Lambda_p)^{\lambda_2}{}_{\lambda}\,\psi_{p_1,\lambda_1}$$

$$= t_0(\Lambda_{p_1}^{-1}\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_p)^{\lambda_1}{}_{\lambda}\,\psi_{p_1,\lambda_1}$$

$$= t(\Lambda_1\Lambda_2,0)\,\psi_{p,\lambda}$$

* Pour une transformation générique dans $\mathcal{P}$ on a

$$t(\Lambda,a)\,\psi_{p,\lambda} = e^{ip a\cdot p'}\,t_0(\Lambda_{p'}^{-1}\Lambda\Lambda_p)^{\lambda'}{}_{\lambda}\,\psi_{p',\lambda'}$$

et la démonstration ci-dessus s'étend sans effort.

* Une base de la représentation unitaire est donc composée par les $\psi_{p,\lambda}$, qui ont un indice discret (λ) et un continu, p^μ. (4 en fait !). Il s'agit donc bien d'une représentation de dimension infinie. Cette infinité est essentiellement due au caractère non-compacte du groupe des translations T. Le caractère non compacte de L se traduit par le fait que les p appartenant à la représentation ont des valeurs non bornées, à $m^2 = p^2$ fixé.

Le petit groupe L_0 est quant à lui compacte, comme on va le voir tout de suite.

* Pour des vecteurs p^μ de type temps, $p^2 = m^2 > 0$, on prend $p_0^\mu = (m, 0, 0, 0)$. On se rend facilement compte que $\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu} p_0 = 0$ (les générateurs du petit groupe $\Lambda p_0 = p_0 \leftrightarrow (1 + \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu}) p_0 = p_0$) impose $\omega_{0i} = 0$ et nous laisse donc avec $L_0 = SO(3)$ le groupe des rotations spatiales de $\mathbb{R}^3$.
* On connaît ses représentation, ce sont les D_j, avec $j \in \mathbb{Z}/2$ (en admettant donc le recouvrement simplement connexe, $SU(2)$, de $SO(3)$). t_0 est donc spécifiée par le spin j et les indices λ sont identifiés aux m qui vont de $-j$ à j.

* Cette représentation D_j de $SO(3)$ est caractérisée par le Casimir J^2 qui a valeur $j(j+1)$. Cependant, J^2 n'est pas un Casimir de $\mathcal{P}$ (ni de L d'ailleurs). On peut néanmoins définir un Casimir de $\mathcal{P}$ qui est en lien avec J^2 pour ces représentations.

* On définit le (quadri) vecteur de Pauli-Lubanski

$W_\mu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^\nu \Pi^{\rho\sigma}$ où $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ tenseur de Levi-Civita pour $\mathbb{R}^{1,3}$, $\varepsilon_{0123} = 1$

ses lois de commutation avec P^α et $\Pi^{\alpha\beta}$ sont calculées facilement :

$[W_\mu, P^\alpha] = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^\nu [\Pi^{\rho\sigma}, P^\alpha] = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^\nu (+P^\rho \eta^{\sigma\alpha} - P^\sigma \eta^{\rho\alpha}) = 0$

en utilisant 2 fois $[P^\mu, P^\nu] = 0$;

$[\Pi^{\mu\nu}, W^\rho] = +W^\mu \eta^{\nu\rho} - W^\nu \eta^{\mu\rho}$ car W^μ est un quadri-vecteur de Lorentz et donc doit se transformer selon la loi prescrite, comme P^μ. (Ceci peut bien entendu se vérifier en utilisant l'algèbre de Poincaré ! On alors vérifié pour certaines valeurs de $\mu\nu\rho$ ...)

* On en déduit que $W^2 = W_\mu W^\mu$ commute avec tous les P^μ et $\Pi^{\mu\nu}$, de la même manière que $P_\mu P^\mu$. C'est donc le ~~2~~ deuxième Casimir.

* Sur le vecteur propre $\psi^\lambda_{p_0}$, on a que

$W_\mu \psi^\lambda_{p_0} = i\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p_0^\nu \Pi^{\rho\sigma} \psi^\lambda_{p_0}$

et donc $W_0 \psi^\lambda_{p_0} = 0$ et $W_i \psi^\lambda_{p_0} = -\frac{i}{2} \varepsilon_{jki} m M^{jk} \psi^\lambda_{p_0}$

$= -m J_i \psi^\lambda_{p_0}$

et donc pour finir

$$W^2 \psi^\lambda_{p_0} = W_\mu W^\mu \psi^\lambda_{p_0} = \left((W_0)^2 - W_i W_i\right)\psi^\lambda_{p_0} = -m^2 J_i J_i \psi^\lambda_{p_0}$$
$$= m^2 J^2 \psi^\lambda_{p_0} = m^2 j(j+1)\,\psi^\lambda_{p_0}$$

On a donc que $W^2 = m^2 j(j+1)$ pour une représentation de spin j du petit groupe à $m^2 > 0$. C'est la façon invariante de Poincaré de spécifier le spin de la représentation.

* On considère pour terminer une représentation avec des p^μ de type lumière : $p^2 = 0$. On prend $p_0^\mu = (E, 0, 0, E)$ avec E l'énergie de la particule allant à la vitesse la lumière.

Pour déterminer le petit groupe, on écrit

$$\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu} p_0 = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{01} & \omega_{02} & \omega_{03} \\ \omega_{01} & 0 & -\omega_{12} & -\omega_{13} \\ \omega_{02} & \omega_{12} & 0 & -\omega_{23} \\ \omega_{03} & \omega_{13} & \omega_{23} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \omega_{03} = 0 \qquad \omega_{01} - \omega_{13} = 0 \qquad \omega_{02} - \omega_{23} = 0$$

et donc on reste avec

$$\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu} = \omega_{12}\Pi^{12} + \omega_{13}\left(\Pi^{01} + \Pi^{13}\right) + \omega_{23}\left(\Pi^{02} + \Pi^{23}\right)$$

on a donc les 3 générateurs de L_0 :

$$J = \Pi^{12}, \quad D_1 = \Pi^{01} + \Pi^{13}, \quad D_2 = \Pi^{02} + \Pi^{23}$$

* l'algèbre de L_0 est donnée par

$$[J, D_1] = [\Pi^{12}, \Pi^{01} + \Pi^{13}] = -\Pi^{20} + \Pi^{23} = \Pi^{02} + \Pi^{23} = D_2$$

$$[J, D_2] = [\Pi^{12}, \Pi^{02} + \Pi^{23}] = \Pi^{10} - \Pi^{13} = -\Pi^{01} - \Pi^{13} = -D_1$$

$$[D_1, D_2] = [\Pi^{01} + \Pi^{13}, \Pi^{02} + \Pi^{23}] = [\Pi^{01}, \Pi^{02}] + [\Pi^{13}, \Pi^{23}]$$

$$= -\Pi^{12} + \Pi^{12} = 0$$

En fait il s'agit de l'algèbre des transformation du plan $\mathbb{R}^2$ qui conservent la norme de la distance : J les rotations et D_1, D_2 les translations : $ISO(2)$ C'est un groupe non compacte.

* Comme $ISO(2)$ est non compacte, ses représentations unitaires sont de dimension infinie, sauf si on impose que D_1 et D_2 soient représentés trivialement. C'est ce qu'on va faire, puisqu'on a toujours assumé que la représentation de L_0 était de dimension finie.

* $\Psi_{p_0}^{\lambda}$ est donc dans une représentation de $SO(2)$, générée par J : $J\Psi_{p_0}^{\lambda} = i\lambda \Psi_{p_0}^{\lambda}$ $\quad (J^\dagger = -J)$
Comme $SO(2)$ est abélien, les représentations unitaires irréductibles sont de dimension 1.
Comme $SO(2)$ est compacte, on a a priori $\lambda \in \mathbb{Z}$.

• Si toutefois on prends le recouvrement de $SO(2)$ qui est un sous groupe de $SU(2)$ plutôt que $SO(3)$, alors on a $\lambda \in \mathbb{Z}/2$. On appelle λ l'hélicité

* $W_0 \psi^\lambda_{p_0} = \frac{1}{2} \varepsilon_{0ijk} p^i M^{jk} \psi^\lambda_{p_0} = iE M^{12} \psi^\lambda_{p_0} = E\lambda \psi^\lambda_{p_0}$

$W_3 \psi^\lambda_{p_0} = \varepsilon_{3012} p^0 M^{12} \psi^\lambda_{p_0} = -iE(-i\lambda)\psi^\lambda_{p_0} = -E\lambda \psi^\lambda_{p_0}$

et donc $W^\mu = (E\lambda, 0, 0, E\lambda)$, $W^2 = 0$

* L'hélicité est la projection du spin le long de la direction de propagation de la particule de type lumière. C'est le seul nombre qui caractérise une représentation unitaire de Poincaré quand $p^2 = 0$.