

COMPÈRE

MATH-F410

REPRÉSENTATION  
DES GROUPES ET  
APPLICATION  
À LA PHYSIQUE



# Table des matières

1	Groupes finis	9
1.1	Notions élémentaires	9
1.2	Groupes finis d'ordre $\leq 4$	11
1.3	Théorème de Cayley	12
1.4	Permutations $S_n$	14
1.5	Sous-groupe normal et groupe quotient	15
1.6	Groupe alterné $A_n$	18
1.7	Groupes simples et résolubles	19
2	Groupes cristallographiques ponctuels	23
2.1	Groupes cristallographiques ponctuels à deux dimensions	23
2.2	Groupes cristallographiques ponctuels à trois dimensions	25
3	Représentation des groupes finis	33
3.1	Notions élémentaires	33
3.2	Représentation régulière	35
3.3	Equivalence aux représentations unitaires et réductibilité	37
3.4	Relations d'orthogonalité	39
3.5	Théorèmes de Peter-Weyl et Burnside	41
3.6	Caractères des représentations irréductibles	44
3.7	Projecteurs sur sous-espace invariants	47
3.8	Décomposition d'une représentation quelconque en représentations irréductibles	49

4	<i>Système à trois ressorts et <math>S_3</math></i>	55
4.1	<i>Représentations de <math>S_3</math></i>	55
4.2	<i>Modes d'oscillation d'un système de 3 ressorts identiques</i>	60
5	<i>Groupes et algèbres de Lie</i>	65
5.1	<i>Groupes de Lie matriciels</i>	65
5.2	<i>Algèbres de Lie</i>	68
6	<i>Unitarité des représentations des groupes compacts</i>	75
6.1	<i>Translations sur un groupe</i>	75
6.2	<i>Intégration invariante sur un groupe de Lie matriciel</i>	77
6.3	<i>Unitarité des représentations des groupes de Lie compacts et des groupes finis</i>	82
7	<i>Classification et représentations des algèbres de Lie compactes</i>	85
7.1	<i>Algèbres de Lie compactes</i>	85
7.2	<i>Sous-algèbres de Cartan – Poids d'une représentation</i>	87
7.3	<i>Représentation adjointe - Racines</i>	88
7.4	<i>Exemple : <math>su(3)</math></i>	91
7.5	<i>Chaînes de poids et chaînes de racines</i>	94
7.6	<i>Racines simples</i>	96
7.7	<i>Matrice de Cartan - Diagrammes de Dynkin</i>	99
7.8	<i>Construction de l'algèbre à partir des racines simples</i>	101
7.9	<i>Poids fondamentaux</i>	103
7.10	<i>Classification des algèbres de Lie simples compactes</i>	107
8	<i>Représentations de <math>su(3)</math></i>	113
8.1	<i>Les représentations <math>(m, n)</math></i>	113
8.2	<i>Méthodes tensorielles</i>	116
8.3	<i>Les poids de la représentation <math>(m, n)</math></i>	121

9	<i>Théorème de Wigner-Eckart</i>	125
9.1	<i>Opérateurs d'entrelacement et représentations complètement réductibles</i>	125
9.2	<i>Coefficients de Clebsch-Gordan</i>	128
9.3	<i>Opérateurs tensoriels irréductibles : définition</i>	130
9.4	<i>Théorème de Wigner-Eckart</i>	131
9.5	<i>Théorème de Wigner-Eckart pour SU(3)</i>	132
10	<i>Interactions fortes et symétrie SU(3)</i>	135
10.1	<i>L'approche de Gell-Mann</i>	135
10.2	<i>"The eight-fold way"</i>	136
10.3	<i>La formule de masse de Gell-Mann Okubo</i>	139
11	<i>Sous-algèbres des algèbres simples compactes</i>	143
11.1	<i>Sous-algèbres maximales</i>	143
11.2	<i>Sous-algèbres maximales des algèbres de Lie simples compactes</i>	145



*Je remercie vivement Marc Henneaux et Andrès Collinucci pour avoir partagé leurs notes de cours données aux années précédentes, ce qui a servi comme base pour ces notes de cours.*





# 1

## Groupes finis

Dans ce chapitre, quelques éléments de la théorie des groupes finis sera présenté. Il est impossible de présenter une classification succincte. Il a en effet fallu le travail d'une centaine de mathématiciens professionnels pour arriver à une telle classification seulement récemment (dans les années 1980). Nous nous contenterons donc une présentation d'éléments de théorie relevante pour tous les groupes, et de cas particuliers intéressants pour les applications en physique.

### 1.1 Notions élémentaires

*Groupe* Un **groupe** est un ensemble d'éléments muni d'une opération associative  $\star : G \times G \rightarrow G$  avec un neutre et un inverse pour chaque élément. Plus précisément, (1)  $\exists e \in G$  tel que  $\forall g \in G, g \star e = e \star g = g$ ; (2)  $\forall g \in G, \exists g^{-1} \in G$  tel que  $g \star g^{-1} = e = g^{-1} \star g$ ; (3)  $\forall g_1, g_2 \in G, g_1 \star g_2 \in G$ .

*Groupe abélien* Un groupe  $G$  est **abélien** si pour tout  $g_1, g_2 \in G, g_1 \star g_2 = g_2 \star g_1$ .

*Groupe fini* Un **groupe fini** est un groupe avec un nombre fini d'éléments. L'ordre d'un groupe fini  $G$  est le nombre d'éléments du groupe. Il est dénoté  $|G|$ .

#### Remarques

- Le neutre est unique. En effet, si il existait deux neutres  $e_1$  et  $e_2$ , on aurait  $e_1 \star g = g = e_2 \star g$  donc en multipliant par  $g^{-1}$  à droite,  $e_1 = e_2$ .
- L'inverse est unique. En effet, soit deux inverses  $i_1$  et  $i_2$  de  $g$  :  $g \star i_1 = e = g \star i_2$ . En multipliant par  $i_1$  à gauche on trouve  $i_1 = i_2$ .

Nous omettrons l'opérateur  $\star$  par la suite pour simplifier la notation.

*Exemples*

- L'espace  $\mathbb{R}$  muni de l'addition,  $(\mathbb{R}, +)$  est un groupe infini-dimensionnel. De même pour  $(\mathbb{Z}, +)$ .
- L'espace  $\mathbb{R}$  muni de la multiplication n'est pas un groupe car 0 n'a pas d'inverse, mais  $(\mathbb{R}^* \equiv \mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$  est un groupe.
- L'ensemble  $\mathbb{Z}_n \equiv \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$  muni de la multiplication telle que  $a^n = e$  est un groupe fini appelé le **groupe cyclique**  $\mathbb{Z}_n$ . Il est abélien.
- $S_n$  est le **groupe symétrique** de degré  $n$ . C'est le groupe fini de permutations de  $n$  objets. Il a  $n!$  éléments.
- $D_n$  ( $n \geq 3$ ) est le **groupe diédral**. Il s'agit du groupe fini de symétries d'un  $n$ -gone régulier. Il a  $2n$  éléments : l'identité, les  $n$  réflexions sur les axes de symétrie et  $n - 1$  rotations autour du centre de  $k \times 360^\circ / n$  degrés,  $k = 1, \dots, n - 1$ .  
Soit  $r$  une rotation de  $360^\circ / n$  degrés. On a  $r^n = 1$ . Soit  $s$  une des réflexions. On a  $s^2 = 1$ . Toute réflexion peut être obtenue par rotations successives de  $s, r^k s, 0 \leq k \leq n - 1$ . On note la propriété non-triviale :  $rsr = s$  ou  $srs^{-1} = r^{-1}$ . Le groupe diédral admet donc la **présentation**

$$D_n = \{r, s \mid r^n = e, s^2 = e, srs^{-1} = r^{-1}\}. \quad (1.1)$$

*Homomorphisme* Soient  $G_1, G_2$  deux groupes. Un **homomorphisme**  $\phi$  de  $G_1$  à  $G_2$  est une application sur les ensembles  $\phi : G_1 \mapsto G_2$  qui respecte les multiplications,

$$\forall g, h \in G_1 \quad \phi(g) *_2 \phi(h) = \phi(g *_1 h). \quad (1.2)$$

*Exemples*

- Le déterminant  $\det : GL(n, \mathbb{C}) \mapsto \mathbb{C}^*$  défini par  $M_{n \times n} \mapsto \det(M_{n \times n})$  satisfait à

$$\forall M_1, M_2 \in GL(n, \mathbb{C}) \quad \det(M_1 M_2) = \det(M_1) \det(M_2). \quad (1.3)$$

C'est donc un homomorphisme entre  $GL(n, \mathbb{C})$  et  $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ .

*Isomorphisme* Deux groupes sont **isomorphes** (ou dans la littérature mathématique : automorphes) quand il existe un homomorphisme entre ces groupes qui est bijectif. On notera deux groupes  $G_1, G_2$  isomorphes par  $G_1 \simeq G_2$ .

*Ordre d'un élément* L'**ordre d'un élément**  $a$  d'un groupe fini  $G$  est le plus petit entier  $n$  tel que  $a^n = e$ .

Puisque le groupe est fini, l'ordre d'un élément existe toujours et est  $\leq |G|$ . En effet, soit  $a \in G$ . On considère la séquence  $a, a^2, a^3, \dots$ . Puisque le groupe est fini, il existe un  $k > l$  tel que  $a^k = a^l$  ou  $a^{k-l} = e$ . L'ordre est le plus petit tel  $k - l$ .

*Sous-groupe* Un **sous-groupe**  $H$  du groupe  $G$  est un sous-ensemble  $H \subseteq G$  tel que  $\forall h_1, h_2 \in H, h_1 h_2 \in H$ . Un sous-groupe strict est défini similairement par un sous-ensemble strict  $H \subset G$ .

Par exemple,  $(\mathbb{Z}, +) \subset (\mathbb{R}, +) \subset (\mathbb{C}, +)$ .

**Théorème 1.1** (Lagrange). *Pour tout sous-groupe  $H$  d'un groupe  $G$ ,  $|H|$  divise  $|G|$ .*

*Démonstration.* voir exercices ou Théorème 1.4. □

*Produit direct* Soient  $G, K$  deux groupes dont les éléments sont respectivement  $\{g_a\}, a = 1, \dots, |G|$  et  $\{k_i\}, i = 1, \dots, |K|$ . **Le groupe produit direct**  $G \times K$  d'ordre  $|G||K|$  est défini par les éléments  $(g_a, k_i)$  et l'opération de groupe

$$(g_a, k_i) \star (g_b, k_j) = (g_a \star g_b, k_i \star k_j). \tag{1.4}$$

## 1.2 Groupes finis d'ordre $\leq 4$

### Le groupe d'ordre 2

Le premier élément est l'identité  $e$  et l'autre élément est  $a$ . La seule possibilité est la table de multiplication (aussi appelée table de Cayley) :

$\mathbb{Z}_2$		$e$	$a$	
$e$		$e$	$a$	
$a$		$a$	$e$	(1.5)

C'est le groupe  $\mathbb{Z}_2$ . En physique, l'opération  $a$  peut être une transformation de parité, de renversement du temps, de rotation sur un axe, de conjugaison de charge électrique, etc.

### Le groupe d'ordre 3

Le premier élément est l'identité  $e$ , le second élément est  $a_1$ . Le troisième élément du groupe doit être  $a_1 \star a_1$ . Sinon  $a_1 \star a_1 = a_1$  mène à  $a_1 = e$ , ou  $a_1 \star a_1 = e$  ferme le groupe à deux éléments. Donc  $a_2 \equiv a_1 \star a_1$  est le troisième élément. On a  $a_1 \star a_2 = a_2 \star a_1$ . La seule possibilité est  $a_1 \star a_2 = e$ . On trouve le groupe cyclique  $\mathbb{Z}_3$  défini par sa table de multiplication

$\mathbb{Z}_3$		$e$	$a_1$	$a_2$	
$e$		$e$	$a_1$	$a_2$	
$a_1$		$a_1$	$a_2$	$e$	
$a_2$		$a_2$	$e$	$a_1$	(1.6)

L'opération  $a_1$  est par exemple une rotation du plan de  $120^\circ$ . Le groupe  $\mathbb{Z}_3$  est abélien.

### Les deux groupes d'ordre 4 (Exercice)

Il existe seulement deux groupes distincts d'ordre 4. Le premier est le groupe cyclique  $\mathbb{Z}_4 = \{e, a_1, a_2, a_3\} = \{e, a, a^2, a^3\}$ . On peut définir l'opération  $a$  par une rotation du plan de  $90^\circ$ . Sa table de multiplication est

$\mathbb{Z}_4$	$e$	$a_1$	$a_2$	$a_3$
$e$	$e$	$a_1$	$a_2$	$a_3$
$a_1$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$e$
$a_2$	$a_2$	$a_3$	$e$	$a_1$
$a_3$	$a_3$	$e$	$a_1$	$a_2$

(1.7)

Alternativement, le groupe  $\mathbb{Z}_4$  est défini par l'opération

$$a : z \mapsto z' = iz$$

où  $z \in \mathbb{C}$ .

Le second groupe est le groupe  $V$ , *Vierergruppe* ou groupe de Klein. C'est un cas dégénéré  $D_2$  du groupe diédral  $D_n$ ,  $n \geq 3$ . Il possède la table de multiplication suivante

$V$	$e$	$a_1$	$a_2$	$a_3$
$e$	$e$	$a_1$	$a_2$	$a_3$
$a_1$	$a_1$	$e$	$a_3$	$a_2$
$a_2$	$a_2$	$a_3$	$e$	$a_1$
$a_3$	$a_3$	$a_2$	$a_1$	$e$

(1.8)

Il est abélien puisque sa table de multiplication est symétrique par rapport à sa diagonale. Le groupe est distinct de  $\mathbb{Z}_4$  puisque que  $\mathbb{Z}_4$  possède un élément d'ordre 4 tandis que  $V$  n'en possède pas. On peut réaliser ce groupe par les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Le groupe  $V$  contient trois sous-groupes isomorphes à  $\mathbb{Z}_2$  qui sont générés respectivement par  $(e, a_1)$ ,  $(e, a_2)$  et  $(e, a_3)$ . Puisque  $a_1 \star a_2 = a_2 \star a_1$ , les éléments des deux premiers  $\mathbb{Z}_2$  commutent. De plus,  $a_1 \star a_2 = a_2 \star a_1 = a_3$ . On peut donc exprimer  $V$  comme le produit direct

$$V = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2. \quad (1.10)$$

En physique, ce groupe apparaît par exemple comme la symétrie sous  $P$  et  $T$  (renversement du temps et, indépendamment, parité).

### 1.3 Théorème de Cayley

#### Translations à gauche

Le groupe  $G$  agit naturellement sur lui-même. A chaque élément  $h \in G$ , on peut associer la transformation inversible

$$L_h : G \rightarrow G \quad g \mapsto L_h(g) = hg$$

appelée **translation à gauche par  $h$** . De  $L_{h_1 h_2}(g) = h_1 h_2 g = L_{h_1}(L_{h_2}(g))$ ,  $L_e =$  transformation identique et  $(L_h)^{-1} = L_{h^{-1}}$ , on déduit que l'ensemble  $\{L_h\}$  est un groupe et que l'application  $h \rightarrow L_h$  est un homomorphisme. Cet homomorphisme est évidemment surjectif et injectif (si  $L_h =$  transformation identique, alors  $hg = g \forall g$  c-à-d  $h = e$ ). Par conséquent, la correspondance  $h \rightarrow L_h$  est un isomorphisme. On a démontré :

**Théorème 1.2.** *Tout groupe  $G$  est isomorphe au groupe des translations à gauche sur  $G$ .*

L'espace  $G$  est évidemment homogène pour les translations à gauche et le groupe  $G$  agit sur lui-même de manière simplement transitive :

$$\forall g_1, g_2 \in G \quad \exists h \in G : L_h g_1 = g_2 \quad (\text{transitivité})$$

( $h$  est donné par  $g_2 g_1^{-1}$ ) et

$$L_h g = g \Rightarrow hg = g \Rightarrow h = e$$

ce qui montre que le groupe de stabilité de n'importe quel point =  $\{e\}$ .

*Translations à droite*

On définit également les **translations à droite de  $G$**  comme

$$R_h(g) = gh^{-1}.$$

On a  $R_{h_1 h_2}(g) = g(h_1 h_2)^{-1} = (gh_2^{-1})h_1^{-1} = R_{h_1}(R_{h_2}(g))$  et donc

$$R_{h_1 h_2} = R_{h_1} R_{h_2}$$

et par conséquent, l'application  $h \mapsto R_h$  définit un homomorphisme de  $G$  dans le groupe des translations à droite, qui est en fait un isomorphisme. Il en résulte que  $G$  agit aussi à droite sur lui-même.

Notez que si on définissait  $R_h(g) = gh$ , la propriété d'homomorphisme (1.2) ne serait pas vérifiée.

Une application directe des considérations précédentes conduit au théorème de Cayley.

**Théorème 1.3** (Théorème de Cayley). *Tout groupe fini  $G$  d'ordre  $n$  est isomorphe à un sous-groupe du groupe symétrique  $S_n$ .*

En effet,  $G$  est isomorphe au groupe des translations à gauche de  $G$  par  $G$ . Or, toute translation à gauche est une permutation des  $n$  éléments de  $G$ , donc  $G$  est isomorphe à un sous-groupe de  $S_n$ .

Le groupe symétrique  $S_n$  joue donc un rôle tout particulier dans l'étude des groupes finis. On voit également que le nombre de groupes finis d'ordre  $n$  distincts (à un isomorphisme près) est *fini* puisque le nombre de sous-ensembles à  $n$  éléments de l'ensemble fini  $S_n$  est fini.

### 1.4 Permutations $S_n$

Une permutation de  $n$  objets  $1, 2, \dots, n$  les mélange dans un ordre différent  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . La transformation  $k \mapsto a_k, k = 1, \dots, n$  peut être représentée par le symbole

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Chaque permutation a un inverse et la permutation identique laisse tous les objets invariants. Les  $n!$  permutations forment le groupe  $S_n$ .

Il existe une notation plus compacte et plus utile. On note  $(a_1 a_2 \dots a_k)$  avec  $k \leq n$  la permutation cyclique ou **cycle** qui envoie  $a_1 \mapsto a_2, a_2 \mapsto a_3, \dots, a_k \mapsto a_1$  et laisse les autres objets inchangés,

$$(a_1 a_2 \dots a_k) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_k \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

Par définition, une **transposition** est un cycle de longueur 2.

Par exemple, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim (1\ 2\ 3\ 4). \quad (1.13)$$

**Proposition 1.3.1.** *Tout élément de  $S_n$  peut s'écrire comme un produit de cycles disjoints.*

*Démonstration.* Soit l'orbite sous permutation  $\sigma$  d'un objet  $a, O_a \equiv \{a, \sigma(a), \sigma^2(a), \dots\}$ . L'élément  $a$  a un ordre fini  $k$  donc l'orbite  $O_a$  est de longueur  $k$ . La permutation agit sur  $O_a$  comme un cycle de longueur  $k$ . On peut alors choisir un autre objet qui n'appartient pas à  $O_a$  et répéter la procédure plusieurs fois jusqu'à couvrir tous les objets par des orbites disjointes. Sur chaque orbite la permutation agit comme un cycle. La permutation se réduit donc à un produit de cycles disjoints. Chaque objet n'appartient qu'à un cycle.  $\square$

**Proposition 1.3.2.** *Deux cycles disjoints de  $S_n$  commutent.*

*Démonstration.* Immédiat. Par définition, un cycle laisse le complément des objets permutés inchangé.  $\square$

Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim (1\ 2)(3)(4) \sim (1\ 2). \quad (1.14)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim (1\ 2)(3\ 4). \quad (1.15)$$

Notez que les permutations  $(1\ 2\ 3\ 4) \sim (2\ 3\ 4\ 1)$  sont identiques. Par convention, on dénote toujours la permutation avec l'élément le plus petit en premier; dans ce cas  $(1\ 2\ 3\ 4)$ .

Par commodité, on ne note pas les cycles triviaux d'un objet. On note donc  $(1\ 2)(3)(4) \sim (1\ 2)$ .

Le groupe des permutations à trois éléments peut donc être noté

$$S_3 = \{e, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\} \quad (1.16)$$

Les produits et inverses sont donnés par

$$(1\ 2)^2 = (1\ 3)^2 = (2\ 3)^2 = e, \quad (1\ 2\ 3)^2 = (1\ 3\ 2), \quad (1.17)$$

$$(1\ 3\ 2)^2 = (1\ 2\ 3), \quad (1\ 2\ 3)^3 = (1\ 3\ 2)^3 = e, \quad (1.18)$$

$$(1\ 2\ 3)^{-1} = (1\ 3\ 2), \quad (1\ 2)(1\ 2\ 3) = (2\ 3), \dots \quad (1.19)$$

Nous utiliserons la convention selon laquelle les permutations agissent sur les objets par la droite :

$$(1\ 2)(1\ 2\ 3)1 = (1\ 2)2 = 1,$$

$$(1\ 2)(1\ 2\ 3)2 = (1\ 2)3 = 3,$$

$$(1\ 2)(1\ 2\ 3)3 = (1\ 2)1 = 2.$$

Donc  $(1\ 2)(1\ 2\ 3) = (2\ 3)$ . [C'est la convention utilisée par Humphreys mais opposée à celle de Ramond]

### 1.5 Sous-groupe normal et groupe quotient

Afin de déterminer plus en détail le contenu du groupe des permutations et ses sous-groupes, introduisons quelques notions utiles.

*Classe latérale à gauche* Soit  $G$  un groupe,  $H \subseteq G$  un sous-groupe et  $g \in G$ . On appelle **classe latérale à gauche de  $g$  suivant  $H$**  l'ensemble

$$gH \equiv \{gh \mid h \in H\} \subseteq G. \quad (1.20)$$

La **classe latérale à droite de  $g$  suivant  $H$**  est définie similairement comme

$$Hg \equiv \{hg \mid h \in H\} \subseteq G. \quad (1.21)$$

Par exemple, soit  $G = (\mathbb{Z}, +)$  et le sous-groupe

$$H \equiv n\mathbb{Z} = \{np \mid p \in \mathbb{Z}\} \quad (\text{muni de l'addition}).$$

On définit pour tout  $r \in \mathbb{Z}$  les classes latérales à gauche

$$rH \equiv \{np + r \mid p \in \mathbb{Z}\}.$$

Explicitement, si

$$H = 2\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}.$$

Alors

$$1H = \{\dots, -3, -1, 1, 3, \dots\}.$$

*Remarques*

- Tout élément  $g \in G$  appartient à une classe latérale à gauche et une classe latérale à droite. En effet,  $g \in gH$  et  $g \in Hg$  puisque  $e \in H$ .
- Si  $g \in G$  appartient à deux classes latérales à droite (ou similairement à gauche)  $g \in Hg_1$  et  $g \in Hg_2$  alors  $Hg_1 = Hg_2$ .

*Démonstration.*  $\exists h_1, h_2$  tels que  $g = h_1g_1 = h_2g_2$ . Donc  $g_1 = h_1^{-1}h_2g_2 \in Hg_2$  et, de même,  $g_2 \in Hg_1$ . Donc  $\forall l \in Hg_1, \exists h$  tel que  $l = hg_1 = hh_1^{-1}h_2g_2$ . Donc  $l \in Hg_2$  et on a  $Hg_1 \subseteq Hg_2$ . De même,  $Hg_2 \subseteq Hg_1$ .  $\square$

- Il en découle que les classes latérales  $Hg$  (ou  $gH$ ) forment une partition de  $G$  : il existe un ensemble d'éléments  $g_1, \dots, g_N$  (qui ne sont pas uniques) tels que  $G = \cup_{1 \leq i \leq N} Hg_i$ .

*Indice de  $H$  en  $G$*  Soit  $G$  un groupe et  $H$  un sous-groupe de  $G$ . L'**indice**  $(G : H)$  de  $H$  en  $G$  est le nombre de classes latérales à gauche distinctes d'éléments de  $G$  suivant  $H$ . On a  $(G : 1) = |G|$ .

**Théorème 1.4** (Lagrange). On a  $|G| = (G : H)|H|$ . De plus, pour tout sous-groupes  $K \subseteq H$  de  $G$ , on a  $(G : K) = (G : H)(H : K)$ .

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate de l'existence d'une partition de  $G$  en classes latérales à gauche.  $\square$

*Sous-groupe normal* Un sous-groupe  $H \subseteq G$  est dit **normal** si ses classes latérales à gauche et à droite coïncident,  $\forall g \in G, gH = Hg$ . Dans ce cas, les classes latérales  $Hg$  définissent le **groupe quotient**  $G/H$  avec produit  $(Hg_1)(Hg_2) \equiv H(g_1g_2)$ . Le produit est bien défini car  $(Hg_1)(Hg_2) = (H)(g_1H)g_2 = H(Hg_1)g_2 = Hg_1g_2$ . L'**indice** du sous-groupe normal dans  $G$  est le nombre de classes latérales  $|G|/|H|$ .

Une seconde définition de sous-groupe normal peut être effectuée en utilisant la notion de conjugation suivante.

*Conjugaison* Soit  $g_a$  un élément d'un groupe  $G$ . On définit le **conjugué** de  $g_a$  par rapport à un autre élément  $g \in G$  comme

$$\tilde{g}_a = g g_a g^{-1}. \quad (1.22)$$

**Proposition 1.4.1.** L'opération de conjugation d'un élément de  $G$  est un isomorphisme de  $G$  dans  $G$ .

*Démonstration.* Tout d'abord, il s'agit d'un homomorphisme puisque la table de multiplication est préservée :  $g_a g_b = g_c$  implique  $\tilde{g}_a \tilde{g}_b = \tilde{g}_c$ . En effet,

$$\tilde{g}_a \tilde{g}_b = g g_a g^{-1} g g_b g^{-1} = g g_a g_b g^{-1} = g g_c g^{-1} = \tilde{g}_c.$$

L'homomorphisme admet un inverse puisque  $g_a = g^{-1} \tilde{g}_a g$ . Il est donc bijectif.  $\square$

La conjugaison admet un rôle particulier pour le groupe  $S_n$  : elle préserve la structure de cycle comme montré dans la proposition suivante.

**Proposition 1.4.2.** Pour tout cycle  $(i_1, \dots, i_k)$  de  $S_n$  et toute permutation  $\sigma \in S_n$ , on a

$$\pi \equiv \sigma(i_1, \dots, i_k) \sigma^{-1} = (\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_k)). \quad (1.23)$$

Par exemple,

$$H = \{e, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\} \simeq \mathbb{Z}_3$$

est un sous-groupe de  $S_3$ . La classe latérale à gauche et à droite de  $e$  suivant  $H$  est  $H$  lui-même. La classe latérale à gauche et à droite de  $(1\ 2)$  suivant  $H$  est

$$(1\ 2)H = H(1\ 2) \equiv \{(1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)\}.$$

(Notez que  $(1\ 2)H$  ne forme pas un sous-groupe.) Le sous-groupe  $\mathbb{Z}_3$  est donc normal, et le groupe quotient est

$$S_3/\mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}_2 \simeq \{e, (1\ 2)\}.$$

Autre exemple. Le groupe  $n\mathbb{Z}$  muni de l'addition est un sous-groupe normal de  $\mathbb{Z}$ . Le groupe quotient  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est isomorphe au groupe cyclique  $\mathbb{Z}_n$ .



*Démonstration.* Par évaluation directe, on vérifie que la permutation  $\pi$  envoie  $\sigma(i_1) \mapsto \sigma(i_2)$ ,  $\sigma(i_2) \mapsto \sigma(i_3)$ , ... et  $\sigma(i_k) \mapsto \sigma(i_1)$ . On vérifie ensuite que  $\pi$  ne déplace pas les objets  $a$  autres que  $\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k)$ . En effet,  $\sigma^{-1}(a) \notin \{i_1, \dots, i_k\}$  donc  $(i_1, \dots, i_k)\sigma^{-1}(a) = \sigma^{-1}(a)$  et finalement  $\pi(a) = \sigma \cdot \sigma^{-1}(a) = a$ . □

*Éléments conjugués* On dit que deux éléments  $g_1, g_2 \in G$  d'un groupe sont **conjugués** s'il existe un  $h \in G$  tel que  $g_1 = hg_2h^{-1}$ . On dénote alors  $g_1 \sim g_2$ .

**Proposition 1.4.3.** *La conjugaison  $\sim$  est une relation d'équivalence*

*Démonstration.* On prouve successivement les trois définitions d'une relation d'équivalence :

- $g \sim g$ . Évident. Il suffit de choisir  $h = e$ .
  - Si  $g_1 \sim g_2$  alors  $g_2 \sim g_1$ . Soit  $h$  tel que  $g_1 = hg_2h^{-1}$  alors  $g_2 = h^{-1}g_1h = (h^{-1})g_1(h^{-1})^{-1}$ .
  - Si  $g_1 \sim g_2$  et  $g_2 \sim g_3$  alors  $g_1 \sim g_3$ . Soit  $g_1 = h_1g_2h_1^{-1}$  et  $g_2 = h_2g_3h_2^{-1}$ . Alors  $g_1 = h_1h_2g_3h_2^{-1}h_1^{-1} = h_1h_2g_3(h_1h_2)^{-1}$ .
- 

**Proposition 1.4.4.** *Les cycles de même longueur de  $S_n$  sont conjugués*

*Démonstration.* Soient deux cycles de longueur  $k$  :  $(a_1 \dots a_k)$  et  $(b_1 \dots b_k)$ . Définissons la permutation  $\sigma$  telle que  $\sigma(a_i) = b_i$ ,  $1 \leq i \leq k$  et telle que  $\sigma$  est une bijection quelconque du complément de  $\{a_1 \dots a_k\}$  sur le complément de  $\{b_1 \dots b_k\}$ . Alors  $\sigma(a_1, \dots, a_k)\sigma^{-1} = (b_1, \dots, b_k)$  par la proposition 1.4.2. □

On peut utiliser la conjugaison pour partitionner les éléments d'un groupe en sous-ensembles disjoints. Choisissons un élément  $g_1$  et conjuguons-le par rapport à tous les éléments de  $G$ . On obtient la **classe de conjugaison**  $C_1$  de  $g_1$ ,

$$C_1 : \quad \tilde{g}_1 = gg_1g^{-1}, \quad \forall g \in G. \tag{1.24}$$

On peut ensuite choisir un nouvel élément  $g_2$  qui n'est pas dans  $C_1$  et former une nouvelle classe de conjugaison

$$C_2 : \quad \tilde{g}_2 = gg_2g^{-1}, \quad \forall g \in G. \tag{1.25}$$

Les éléments de  $C_1$  et  $C_2$  ne sont pas conjugués par construction. On peut continuer la procédure et puisque le groupe est fini, la procédure s'arrête après avoir trouvé  $k$  classes distinctes. La construction ne dépend pas du choix d'éléments  $g_1, g_2, \dots$  et le **nombre de classes de conjugaison**  $k$  est donc une caractéristique du groupe.

Pour  $S_3$ , on a les relations de conjugaison

$$(12) \sim (13) \sim (23).$$

En effet,

$$(23) = (12)(13)(12),$$

$$(23) = (13)(12)(13)$$

et

$$(12) = (23)(13)(23).$$

Aussi, on a

$$(12) = (123)(12)(123)$$

et

$$(132) = (12)(123)(12).$$

On peut donc partitionner  $S_3$  comme

$$S_3 = \{[e], [a_1a_2]_3 \text{ fois}, [a_1a_2a_3]_2 \text{ fois}\}.$$

Le nombre de classes de conjugaison de  $S_3$  est donc 3.

*Remarques* L'élément neutre détermine toujours sa propre classe de conjugaison. Tout groupe abélien d'ordre  $n$  possède  $n$  classes distinctes.

**Proposition 1.4.5.** Soit  $H \subseteq G$  un sous-groupe de  $G$ . Si le conjugué de chaque élément  $h \in H$  par chaque élément  $g \in G$  reste dans  $H$ , c'est-à-dire

$$\forall h \in H, \forall g \in G, \quad ghg^{-1} \in H$$

alors  $H$  est un **sous-groupe normal**.

*Démonstration.* Soient  $g \in G$  et  $h \in H$  quelconques. On dénote  $h_2 = ghg^{-1} \in H$ . On a donc  $gh = h_2g$  et  $hg^{-1} = g^{-1}h_2$ . La première relation implique  $gH \subseteq Hg$  et la deuxième implique  $Hg^{-1} \subseteq g^{-1}H$ . Puisque ces relations sont vraies pour tout  $g$ , on a aussi  $Hg \subseteq gH$ . Donc les classes latérales à gauche et à droite coïncident.  $\square$

Si une union de classes de conjugaison forme un sous-groupe, ce sous-groupe forme donc automatiquement un sous-groupe normal.

## 1.6 Groupe alterné $A_n$

**Proposition 1.4.6.** Tout cycle peut être décomposé en un produit de transpositions,

$$(a_1 \dots a_k) = (a_1 a_k)(a_1 a_{k-1}) \cdots (a_1 a_2). \quad (1.26)$$

*Démonstration.* On vérifie que les deux membres de l'équation permutent tous les objets de manière identique.  $\square$

**Corollaire 1.4.1.** Toute permutation peut s'écrire comme un produit de transpositions.

*Démonstration.* C'est une conséquence des propositions 1.3.1 et 1.4.6.  $\square$

A chaque permutation de  $S_n$  on peut associer une matrice  $n \times n$  inversible (composées de zéros et de  $n$  1) qui agit sur un vecteur d'objets de longueur  $n$ . Cette isomorphisme réalise  $S_n$  comme un sous-groupe de  $GL(n, \mathbb{R})$ .  $S_n$  peut être défini comme le groupe de telles matrices. Une transposition est associée à une matrice de déterminant  $-1$ . Comme le déterminant est un homomorphisme et par le corollaire 1.4.1, le déterminant d'une matrice quelconque de  $S_n$  est soit 1, soit  $-1$ . Ce nombre est appelé le **signe de la permutation**  $\sigma$  et est dénoté  $\text{sgn}(\sigma)$ . Une manière simple d'obtenir le signe d'une permutation consiste à la décomposer en produits de transpositions et compter le nombre de transpositions modulo 2. Ce nombre est unique pour toute décomposition en transpositions car le déterminant d'une matrice comme produit de matrices est unique.

Revenons encore sur le sous-groupe de  $S_3$ ,

$$\mathbb{Z}_3 = \{e, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$

qui est l'union des deux classes de conjugaisons  $[e] = \{e\}$  et  $[123] = \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ . On a

$$(1\ 2)(1\ 2\ 3)(1\ 2) = (1\ 3\ 2)$$

ainsi que les relations similaires obtenues par permutations des indices. La conjugaison d'éléments de  $\mathbb{Z}_3$  par  $S_3$  préserve  $\mathbb{Z}_3$  et donc  $\mathbb{Z}_3$  est un sous-groupe normal.

Sans perte de généralité, une transposition des deux premiers objets est associée à

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

*Groupe alterné* Le **groupe alterné**  $A_n$  est défini comme

$$A_n = \{\sigma \in S_n \mid \text{sgn}(\sigma) = 1\}. \quad (1.27)$$

*Propriétés*

- Son ordre est  $|A_n| = \frac{1}{2}n!$  pour tout  $n \geq 2$ . En effet, soit  $\tau = (1\ 2) \notin A_n$ . Si  $\sigma \notin A_n$  alors  $\sigma\tau \in A_n$ . Donc  $\sigma$  fait partie de la classe latérale à droite  $\sigma \in A_n\tau$ . On déduit  $S_n = A_n \cup A_n\tau$  avec  $A_n \cap A_n\tau = \emptyset$ .
- $A_n$  est non-abélien pour  $n \geq 4$ . En effet, il contient les 3-cycles. Or  $(1\ 2\ 3)(1\ 2\ 4)$  envoie  $4 \mapsto 2$  tandis que  $(1\ 2\ 4)(1\ 2\ 3)$  envoie  $4 \mapsto 1$ .

### 1.7 Groupes simples et résolubles

Les concepts de groupe simple et de groupe résoluble ont été introduit par Galois, le père fondateur de la théorie des groupes.

*Groupe simple* Un groupe est **simple** s'il ne possède pas de sous-groupe normal **non-trivial** (c'est-à-dire l'identité ou lui-même).

Un exemple de groupe simple est le groupe cyclique  $\mathbb{Z}_p$  où  $p$  est un nombre premier.

*Groupe résoluble* Un groupe  $G$  est **résoluble** s'il existe une série de sous-groupes normaux  $G_i$

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots \supseteq G_r = \{e\} \quad (1.28)$$

tels que tous les groupes quotients  $G_0/G_1, G_1/G_2, \dots, G_{r-1}/G_r$  sont abéliens.

Galois a montré que la solution d'un polynôme général de degré  $n$  en radicaux était possible seulement si le groupe  $S_n$  qui agit sur les racines était résoluble. Pour  $n = 3$  on a

$$S_3 \supset A_3 \supset \{e\} \quad (1.29)$$

avec  $S_3/A_3 \simeq \mathbb{Z}_2$  et  $A_3 \simeq \mathbb{Z}_3$ . Pour  $n = 4$  on a

$$S_4 \supset A_4 \supset V \supset \{e\} \quad (1.30)$$

avec  $S_4/A_4 = \mathbb{Z}_2$ ,  $A_4/V = \mathbb{Z}_3$  et  $V \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ . Donc  $S_3$  et  $S_4$  sont résolubles et un polynôme d'ordre 3 ou 4 admet une solution en radicaux.

Par contre, Galois a montré que  $A_5$  est un groupe simple. Comme c'est un groupe non-abélien, il est non-résoluble. Cela implique qu'il

Par exemple,

$$S_2 = \{e, (1\ 2)\} \supset A_2 = \{e\}.$$

Aussi,

$$A_3 = \{e, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\} \simeq \mathbb{Z}_3.$$

Par contre le groupe  $\mathbb{Z}_4 = \{e, a, a^2, a^3\}$  est n'est pas simple. Il admet  $\mathbb{Z}_2 = \{e, a^2\}$  comme groupe normal. En effet,  $a\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2a = \{a, a^3\}$  et  $\mathbb{Z}_4 = \mathbb{Z}_2 \cup a\mathbb{Z}_2$ .

Notez que l'on a aussi  $S_3 \supset S_2 \supset \{e\}$  mais  $S_2$  n'est pas un sous-groupe normal de  $S_3$  car  $(123)(12)(132) = (23)$  et pas  $(12)$ .

n'y a pas de solution en radicaux d'un polynôme d'ordre 5 en général (mais il peut y en avoir pour des cas particuliers).

Tous les groupes finis peuvent être construits à partir des groupes simples. La classification des groupes simples a requis le travail d'une centaine de mathématiciens et la classification s'est achevée seulement au début des années 1980. Les groupes simples peuvent être catégorisés en 18 familles infinies et une liste de 26 cas particuliers :

- Les groupes cycliques  $\mathbb{Z}_p$  d'ordre  $p$  premier
- Les groupes alternés  $A_n$ ,  $n \geq 5$
- Les 16 familles de groupes finis de type Lie (pas définis dans ce cours)
- Les 26 groupes finis sporadiques (pas définis dans ce cours)

Pour le plaisir, on note que le plus grand des groupes sporadiques est connu sous le nom *Groupe monstre M* et admet

$$2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71 \approx 8 \times 10^{53}$$

éléments.

Pour illustrer l'étendue et la complexité de la classification des groupes finis, les deux tables 1.1 et 1.2 sont données, tirées du livre de P. Ramond "Group theory".

FIGURE 1.1: Liste des groupes finis d'ordre 12 ou moins. Les groupes non-abéliens sont indiqués avec une astérisque.

Table 2.1. *Finite groups of lowest order*

Order	Group	Isomorphism	Type
2	$\mathbb{Z}_2$		Cyclic
3	$\mathbb{Z}_3$		Cyclic
4	$\mathbb{Z}_4$		Cyclic
4	$\mathcal{D}_2$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	Dihedral, Klein's four-group
5	$\mathbb{Z}_5$		Cyclic
6	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$	Cyclic
6*	$\mathcal{D}_3$	$S_3$	Dihedral, permutation
7	$\mathbb{Z}_7$		Cyclic
8	$\mathbb{Z}_8$		Cyclic
8	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$		
8	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathcal{D}_2 \times \mathbb{Z}_2$	
8*	$\mathcal{D}_4$		Dihedral
8*	$Q$	$Q_4$	Quaternion, dicyclic
9	$\mathbb{Z}_9$		Cyclic
9	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$		
10	$\mathbb{Z}_{10}$	$\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2$	Cyclic
10*	$\mathcal{D}_5$		Dihedral
11	$\mathbb{Z}_{11}$		Cyclic
12	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$	Cyclic
12	$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathcal{D}_2 \times \mathbb{Z}_3$	
12*	$\mathcal{D}_6$	$\mathcal{D}_3 \times \mathbb{Z}_2$	Dihedral
12*	$Q_6$		Dicyclic, binary dihedral
12*	$T$	$A_4$	Tetrahedral, alternating

FIGURE 1.2: Nombre de groupes d'ordre 200 ou moins. Le nombre de groupes abéliens sont indiqués entre crochets.

Table 2.2. *Number of groups of order up to 200*

Order	$N[N_{Abel}]$	Order	$N[N_{Abel}]$	Order	$N[N_{Abel}]$	Order	$N[N_{Abel}]$	Order	$N[N_{Abel}]$
1	1 [1]	41	1 [1]	81	15 [5]	121	2 [2]	161	1 [1]
2	1 [1]	42	6 [1]	82	2 [1]	122	2 [1]	162	55 [5]
3	1 [1]	43	1 [1]	83	1 [1]	123	1 [1]	163	1 [1]
4	2 [2]	44	4 [2]	84	15 [2]	124	4 [2]	164	5 [2]
5	1 [1]	45	2 [2]	85	1 [1]	125	5 [3]	165	2 [1]
6	2 [1]	46	2 [1]	86	2 [1]	126	16 [2]	166	2 [1]
7	1 [1]	47	1 [1]	87	1 [1]	127	1 [1]	167	1 [1]
8	5 [3]	48	52 [5]	88	12 [3]	128	2328 [15]	168	57 [3]
9	2 [2]	49	2 [2]	89	1 [1]	129	2 [1]	169	2 [2]
10	2 [1]	50	2 [2]	90	10 [2]	130	4 [1]	170	4 [1]
11	1 [1]	51	1 [1]	91	1 [1]	131	1 [1]	171	5 [2]
12	5 [2]	52	5 [2]	92	4 [2]	132	10 [2]	172	4 [2]
13	1 [1]	53	1 [1]	93	2 [1]	133	1 [1]	173	1 [1]
14	2 [1]	54	15 [3]	94	2 [1]	134	2 [1]	174	4 [1]
15	1 [1]	55	2 [1]	95	1 [1]	135	5 [3]	175	2 [2]
16	14 [5]	56	13 [3]	96	230 [7]	136	15 [3]	176	42 [5]
17	1 [1]	57	2 [1]	97	1 [1]	137	1 [1]	177	1 [1]
18	5 [2]	58	2 [1]	98	5 [2]	138	4 [1]	178	2 [1]
19	1 [1]	59	1 [1]	99	2 [2]	139	1 [1]	179	1 [1]
20	5 [2]	60	13 [2]	100	16 [4]	140	11 [2]	180	37 [4]
21	2 [1]	61	1 [1]	101	1 [1]	141	1 [1]	181	1 [1]
22	2 [1]	62	2 [1]	102	4 [1]	142	2 [1]	182	4 [1]
23	1 [1]	63	4 [2]	103	1 [1]	143	1 [1]	183	2 [1]
24	15 [3]	64	267 [11]	104	14 [3]	144	197 [10]	184	12 [3]
25	2 [2]	65	1 [1]	105	2 [1]	145	1 [1]	185	1 [1]
26	2 [1]	66	4 [1]	106	2 [1]	146	2 [1]	186	6 [1]
27	5 [3]	67	1 [1]	107	1 [1]	147	6 [2]	187	1 [1]
28	4 [2]	68	5 [2]	108	45 [6]	148	5 [2]	188	4 [2]
29	1 [1]	69	1 [1]	109	1 [1]	149	1 [1]	189	13 [3]
30	4 [1]	70	4 [1]	110	6 [1]	150	13 [2]	190	4 [1]
31	1 [1]	71	1 [1]	111	2 [1]	151	1 [1]	191	1 [1]
32	51 [7]	72	50 [6]	112	43 [5]	152	12 [3]	192	1543 [11]
33	1 [1]	73	1 [1]	113	1 [1]	153	2 [2]	193	1 [1]
34	2 [1]	74	2 [1]	114	6 [1]	154	4 [1]	194	2 [1]
35	1 [1]	75	3 [2]	115	1 [1]	155	2 [1]	195	2 [1]
36	14 [4]	76	4 [2]	116	5 [2]	156	18 [2]	196	17 [4]
37	1 [1]	77	1 [1]	117	4 [2]	157	1 [1]	197	1 [1]
38	2 [1]	78	6 [1]	118	2 [1]	158	2 [1]	198	10 [2]
39	2 [1]	79	1 [1]	119	1 [1]	159	1 [1]	199	1 [1]
40	14 [3]	80	52 [5]	120	47 [3]	160	238 [7]	200	52 [6]



## 2

# Groupes cristallographiques ponctuels

*Groupe cristallographique* On dit qu'un groupe est **cristallographique** s'il préserve un réseau. Un réseau  $R$  de l'espace  $\mathbb{R}^n$  est par définition l'ensemble de tous les vecteurs combinaisons linéaires à coefficients entiers de  $n$  vecteurs linéairement indépendants  $\mathbf{a}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ),

$$\mathbf{x} \in R \Leftrightarrow \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n z_i \mathbf{a}_i, \quad z_i \in \mathbb{Z}. \quad (2.1)$$

Il existe 17 groupes cristallographiques du plan et 230 groupes cristallographiques de l'espace Euclidien à 3 dimensions. Nous ne le prouverons pas ici.

*Groupe cristallographique ponctuel* On appelle **groupe cristallographique ponctuel** à  $n$  dimensions tout sous-groupe cristallographique fini de  $O(n)$ .

Nous allons établir la classification des groupes cristallographiques ponctuels à 2 dimensions et dériver une partie de la classification à 3 dimensions. Il existe 10 groupes cristallographiques ponctuels du plan et 32 groupes cristallographiques ponctuels de l'espace Euclidien à 3 dimensions.

### 2.1 Groupes cristallographiques ponctuels à deux dimensions

#### *Sous-groupes finis de $SO(2)$*

Les éléments de  $SO(2)$  sont les rotations du plan autour de l'origine. Nous aurons besoin du lemme suivant de la théorie des nombres :

**Lemme 2.1 (Bézout).** Soient  $a$  et  $b$  deux entiers de plus grand diviseur commun  $d$ . Alors il existe  $x, y \in \mathbb{Z}$  tels que  $ax + by = d$ . En particulier, si  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux, il existe  $x, y \in \mathbb{Z}$  tels que  $ax + by = 1$ .

Note historique : en 1891, Fedorov et indépendamment Schönflies ont classifié ces groupes avec quelques omissions et duplications. Après une correspondance, ils sont arrivés à la liste finale des 230 groupes en 1892.

Il existe deux notations pour les 32 groupes cristallographiques ponctuels à  $3d$  : celle de Schönflies utilisée en spectroscopie moléculaire, et celle de Hermann-Mauguin utilisée en cristallographie.

Démonstration du Lemme 2.1 : considérons les entiers positifs de la forme  $aw + bz$ ,  $w, z \in \mathbb{Z}$ . Soit  $e$  le plus petit de ces nombres,  $e = xa + yb > 0$ . La division de  $a$  par  $e$  donne  $a = qe + r$ , où le reste  $r$  est compris entre 0 et  $e$ ,  $0 \leq r < e$ . Substituant  $e = xa + yb$ , on trouve  $r = a(1 - qx) - bxy$  et donc  $r$  est de la forme  $aw + bz$ ,  $w, z \in \mathbb{Z}$ . Comme  $r < e$ , ceci implique  $r = 0$  car  $e$  est le plus petit nombre positif de cette forme. Par conséquent,  $e$  divise  $a$ . De même,  $e$  divise  $b$ . Enfin, soit  $c$  un diviseur commun de  $a$  et  $b$ . Alors  $c$  divise  $e = xa + yb$ . Il en résulte que  $e = d$  est le plus grand diviseur commun de  $a$  et de  $b$ .

**Proposition 2.1.1.** *Tout sous-groupe fini de  $SO(2)$  est isomorphe à un des groupes cycliques  $C_p$ ,  $p \in \mathbb{Z}_0$ . Ces groupes sont les groupes des rotations préservant un polygone régulier à  $p$  côtés.*

*Démonstration.* Si  $G$  est un sous-groupe non trivial de  $SO(2)$ , alors  $G$  contient une rotation non triviale d'angle minimum, soit  $R(\varphi)$ . Si  $G$  est fini, on a  $R^p = I$  pour un certain entier  $p$  et donc  $\varphi$  est égal à  $\frac{k}{p}(2\pi)$  où  $k$  et  $p$  sont des entiers que l'on peut supposer positifs et premiers entre eux. On prétend que  $k = 1$ . En effet, par le lemme de Bézout, il existe  $z, z' \in \mathbb{Z}$  tels que  $kz - pz' = 1$ . Autrement dit, il existe (au moins) un multiple de  $\frac{k}{p}$  qui diffère de  $\frac{1}{p}$  par un entier. Ceci montre que  $G$  contient la rotation d'angle  $\frac{1}{p}(2\pi)$ , et comme  $\frac{k}{p}(2\pi)$  est le plus petit angle de rotation dans  $G$ , on a  $k = 1$ .

Soit  $R(\varphi')$  un élément de  $G$ . L'angle  $\varphi'$  est nécessairement un multiple de  $\frac{1}{p}(2\pi)$ ; dans le cas contraire, il y aurait une rotation d'angle plus petit que  $\frac{1}{p}(2\pi)$  dans  $G$ , contrairement aux hypothèses. Donc,  $G$  est le groupe cyclique  $C_p$  contenant les rotations d'angle  $\frac{k}{p}(2\pi)$ ,  $k = 0, 1, \dots, p - 1$ . Il y a une infinité de sous-groupes finis de  $SO(2)$ , caractérisés par un entier positif  $p$ . □

Le groupe cyclique  $Z_p$  est habituellement noté  $C_p$  lorsqu'il réfère aux rotations discrètes du plan.

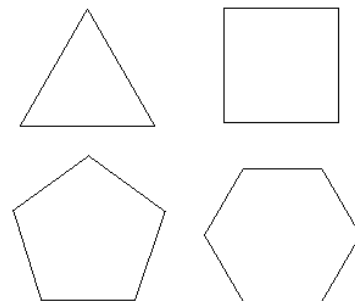
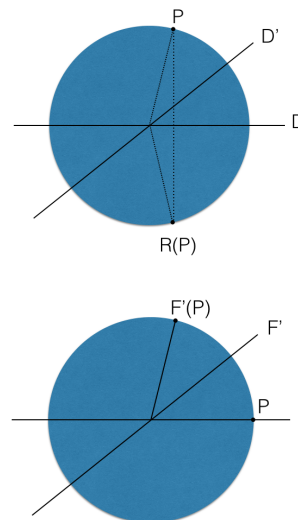


FIGURE 2.1: Les premiers polygones réguliers.

*Sous-groupes finis de  $O(2)$*

On obtient les sous-groupes finis de  $O(2)$  en ajoutant des réflexions aux groupes  $C_p$ . Le produit de la réflexion par rapport à la droite  $D$  passant par l'origine et de la rotation d'angle  $\varphi$  est la réflexion par rapport à la droite  $D'$  faisant un angle  $\varphi/2$  avec  $D$  (et passant aussi par l'origine).

D'autre part, le produit des réflexions par rapport aux droites  $F$  et  $F'$  faisant un angle  $\alpha$  est la rotation d'angle  $2\alpha$ . Il en découle que les sous-groupes finis de  $O(2)$  contenant des réflexions s'obtiennent en ajoutant à  $C_p$   $p$  réflexions par rapport à  $p$  droites faisant un angle  $\frac{\pi}{p}$ . Les groupes correspondants sont appelés groupes diédraux d'ordre  $2p$  et notés  $D_p$ . Ce sont les groupes de symétries complets des polygones réguliers.



**Remarque 2.2.** *Le plan  $\Pi$  sur lequel agit  $O(2)$  peut être plongé dans l'espace à trois dimensions. Les groupes  $C_p$  et  $D_p$  peuvent alors être vus comme sous-groupes finis de  $SO(3)$ . C'est évident pour  $C_p$  dont les éléments peuvent être vus comme des rotations autour de l'axe perpendiculaire au plan  $\Pi$  passant par l'origine; on dit que cet axe est un axe d'ordre  $p$ . C'est aussi vrai pour  $D_p$  si on voit les réflexions planaires par rapport à la droite  $D$  de  $\Pi$  comme une rotation d'espace d'angle  $\pi$  autour de  $D$ . Le groupe diédral  $D_p$  contient donc un axe d'ordre  $p$  et  $p$  axes d'ordre deux. A noter que vus comme sous-groupes de  $SO(3)$ , les groupes  $C_2$  et  $D_1$  sont équivalents (un seul axe d'ordre 2 dans les deux cas).*



*Groupes cristallographiques ponctuels à deux dimensions*

Soit un réseau  $R$  comme défini en 2.1 Les seuls axes permis pour un groupe cristallographique sont d'ordre  $p = 1, 2, 3, 4, 6$ . En effet, une condition nécessaire pour que la rotation d'angle  $\frac{2\pi}{p}$  préserve  $R$  est que sa trace soit un entier<sup>1</sup>. La trace de la matrice de rotation  $R(\varphi)$  est égale à  $2 \cos \varphi$ . Il faut donc

$$2 \cos\left(\frac{2\pi}{p}\right) \in \mathbb{Z}.$$

Ceci donne comme possibilités

$$2 \cos\left(\frac{2\pi}{p}\right) = \pm 2, \pm 1, 0$$

correspondant aux cas  $p = 1, 2, 6, 3, 4$  annoncés. La condition nécessaire est aussi suffisante (à deux dimensions). Nous avons donc prouvé qu'il y a dix groupes cristallographiques ponctuels à deux dimensions :  $C_p, D_p$  ( $p = 1, 2, 3, 4, 6$ ).

Par exemple,  $C_1 \equiv \{I\}$  préserve un réseau arbitraire,  $D_1 \simeq \mathbb{Z}_2$ ,  $C_2, D_2 \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ,  $C_4$  et  $D_4$  préservent les réseaux carrés (vecteurs de base  $\mathbf{a}_1$  et  $\mathbf{a}_2$  de même norme et orthogonaux), tandis que  $C_3, D_3, C_6$  et  $D_6$  préservent les réseaux hexagonaux (vecteurs de base  $\mathbf{a}_1$  et  $\mathbf{a}_2$  de même norme et formant un angle de  $120^\circ$ ).

*2.2 Groupes cristallographiques ponctuels à trois dimensions*

On appelle groupe cristallographique ponctuel à trois dimensions tout sous-groupe cristallographique fini de  $O(3)$ .

*Polyèdres réguliers*

*Classification* Plusieurs groupes cristallographiques sont liés aux polyèdres réguliers (ou "solides de Platon"). Nous allons d'abord décrire ces polyèdres et leur groupe de symétrie.

Un polyèdre régulier est un polyèdre dont toutes les faces sont des polygones réguliers identiques et dont tous les sommets sont entourés par le même nombre de faces. Si  $p$  est le nombre de côtés du polygone régulier qui intervient dans le polyèdre et  $q$  le nombre de faces qui entourent un sommet, on note le polyèdre  $\{p, q\}$ . Bien entendu,  $p > 2$  et  $q > 2$ . Dans le plan, il existe une infinité de polygones réguliers. Les polyèdres réguliers sont par contre en nombre fini.

L'angle formé par les côtés adjacents d'un polygone régulier à  $p$  côtés est égal à  $\pi(1 - \frac{2}{p})$ . A un sommet du polyèdre régulier  $\{p, q\}$  se rencontrent  $q$  tels polygones et la somme des angles des faces qui se

1. La trace de la matrice d'une transformation ne dépend pas de la base. Dans une base adaptée au réseau, où les vecteurs de base sont  $\{\mathbf{a}_n\}$ , la matrice d'une transformation qui préserve le réseau est à coefficients entiers, donc sa trace est entière.

rejoignent est strictement inférieure à  $2\pi$ . Donc, on a  $q\pi(1 - \frac{2}{p}) < 2\pi$  ou encore

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} > \frac{1}{2} \quad (2.2)$$

Les seules solutions sont

$$\begin{aligned} &\{3,3\} \\ &\{3,4\}, \{4,3\} \\ &\{3,5\}, \{5,3\} \end{aligned}$$

Le premier cas correspond au tétraèdre régulier. Les deuxième et troisième cas correspondent à l'octaèdre et au cube. Les quatrième et cinquième cas correspondent à l'icosaèdre et au dodécaèdre.

Ces polyèdres réguliers ont des nombres de faces ( $N_2$ ), arêtes ( $N_1$ ) et sommets ( $N_0$ ) donnés par

$$\text{Tétraèdre } \{3,3\} \quad N_0 = 4 \quad N_1 = 6 \quad N_2 = 4 \quad (2.3)$$

$$\text{Octaèdre } \{3,4\} \quad N_0 = 6 \quad N_1 = 12 \quad N_2 = 8 \quad (2.4)$$

$$\text{Cube } \{4,3\} \quad N_0 = 8 \quad N_1 = 12 \quad N_2 = 6 \quad (2.5)$$

$$\text{Icosaèdre } \{3,5\} \quad N_0 = 12 \quad N_1 = 30 \quad N_2 = 20 \quad (2.6)$$

$$\text{Dodécaèdre } \{5,3\} \quad N_0 = 20 \quad N_1 = 30 \quad N_2 = 12 \quad (2.7)$$

On obtient ces nombres par inspection. A noter que

$$N_2 - N_1 + N_0 = 2 \quad (\text{formule d'Euler}). \quad (2.8)$$

On a également pour tout polyèdre régulier  $\{p, q\}$ ,

$$qN_0 = 2N_1 = pN_2 \quad (2.9)$$

En effet, le nombre  $N_1$  d'arêtes est égal au nombre  $N_0$  de sommets fois  $q$  (car de tout sommet part  $q$  arêtes) divisé par 2 (car ce faisant, on compte chaque arête deux fois). De même,  $N_1$  est aussi égal au nombre  $N_2$  de faces fois  $p$  (car chaque face contient  $p$  arêtes) divisé par 2 (car chaque arête appartient à deux faces).

*Groupes des polyèdres* On appelle groupe du polyèdre  $\{p, q\}$  le sous-groupe (fini)  $R_{\{p,q\}}$  de  $SO(3)$  qui laisse le polyèdre  $\{p, q\}$  invariant. Si un axe de rotation de  $R_{\{p,q\}}$  (passant par le centre du polyèdre) passe par l'intérieur d'une face, il doit nécessairement passer par le centre de celle-ci et il doit être d'ordre  $p$ . De même, si un axe de rotation passe par l'intérieur d'une arête, il doit nécessairement passer par le milieu de celle-ci il doit être d'ordre 2. Enfin, un axe de rotation passant par un sommet doit être d'ordre  $q$ . Il y a donc  $N_0/2$  axes d'ordre  $q$ ,  $N_1/2$  axes d'ordre 2 et  $N_2/2$  axes d'ordre  $p$ . En fait,

$$R_{\{p,q\}} = R_{\{q,p\}} \quad (2.10)$$

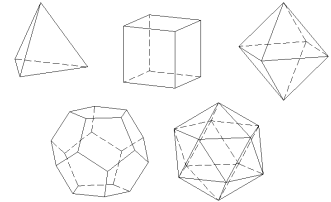


FIGURE 2.2: Les polyèdres réguliers (tétraèdre, cube, octaèdre, dodécaèdre et icosaèdre)

puisque l'on peut placer un cube dans l'octaèdre en inversant les axes de symétrie des faces et des sommets. La même relation est vraie entre l'icosaèdre et le dodécaèdre.

Comptons maintenant l'ordre du groupe. Pour chaque sommet, on a  $q - 1$  rotations ; pour chaque arête, on a une rotation ; et pour chaque face, on a  $p - 1$  rotations (en excluant chaque fois l'identité). Mais sommets, arêtes et faces viennent par paires antipodales, sauf pour le tétraèdre, où chaque sommet est opposé à une face. Dans tous les cas, le nombre total de rotations (excluant l'identité) est égal à

$$\frac{1}{2}[N_0(q - 1) + N_1 + N_2(p - 1)] = \frac{1}{2}(N_0q - 2 + N_2p) = 2N_1 - 1$$

par (2.8) et (2.9). Par conséquent, l'ordre de  $R_{\{p,q\}} = R_{\{q,p\}}$  est  $2N_1$ .

Le groupe  $R_{\{3,3\}}$  du tétraèdre est d'ordre 12, celui de l'octaèdre (ou du cube) est d'ordre 24 et celui de l'icosaèdre (ou du dodécaèdre) est d'ordre 60. On note souvent

$$T \equiv R_{\{3,3\}}, \tag{2.11}$$

$$O \equiv R_{\{3,4\}} = R_{\{4,3\}}, \tag{2.12}$$

$$Y \equiv R_{\{3,5\}} = R_{\{5,3\}}. \tag{2.13}$$

Les seuls axes permis pour un groupe cristallographique sont d'ordre  $p = 1, 2, 3, 4, 6$  (même argument qu'à 2 dimensions). Donc, seuls  $T$  et  $O$  sont cristallographiques.

### *IO(n) et réflexions*

On appelle groupe euclidien inhomogène  $IO(n)$  le groupe des isométries de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ . Ce groupe contient les translations, les rotations et les réflexions par rapport à un hyperplan quelconque, ainsi que leurs produits. Le sous-groupe  $ISO(n)$  des **déplacements** ne contient que les isométries préservant l'orientation et est engendré par les translations et les rotations.

**Théorème 2.3.** *Toute transformation de  $IO(n)$  peut s'écrire comme un produit fini de réflexions. Celles-ci engendrent donc tout  $IO(n)$ .*

*Démonstration.* La translation par  $\mathbf{a}$  est égale au produit de la réflexion par rapport à l'hyperplan perpendiculaire à  $\mathbf{a}$  passant par l'origine et de la réflexion par rapport à l'hyperplan parallèle passant par  $\mathbf{a}/2$ . Ceci ramène le problème à écrire un élément quelconque de  $O(n)$  comme produit de réflexions. On raisonne par récurrence sur la dimension : la propriété est vraie pour  $n = 2$  car toute rotation du plan d'angle  $\varphi$  est égale au produit de deux réflexions par rapport à des droites faisant un angle  $\varphi/2$ . D'autre part, si la propriété est vraie en dimension  $n$ , elle est aussi vraie en dimension  $n + 1$  : soit  $A$  un

Les groupes complets de symétrie des polyèdres réguliers s'obtiennent en ajoutant les réflexions.

Une réflexion autour de l'origine est donnée par

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} - 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur de norme 1 orthogonal à l'hyperplan de réflexion (l'ambiguïté de signe de  $\mathbf{n}$  ne joue pas).

élément de  $O(n+1)$ . On a  $E_{n+1} = E_n \oplus \mathbb{R}\mathbf{e}_{n+1}$ . Si  $A\mathbf{e}_{n+1} = \mathbf{e}_{n+1}$ ,  $A$  est en fait un élément de  $O(n)$  et il n'y a rien à montrer par l'hypothèse de récurrence. Sinon, les deux vecteurs  $\mathbf{e}_{n+1}$  et  $A\mathbf{e}_{n+1}$  forment un plan et sont reliés par un élément de  $SO(2)$ . Il sont donc reliés entre eux par un produit de deux réflexions  $S \equiv R_1R_2$  que l'on peut choisir orthogonaux au plan,  $\mathbf{e}_{n+1} = SA\mathbf{e}_{n+1}$ . La transformation  $SA$  laisse  $\mathbf{e}_{n+1}$  fixe et définit donc un élément de  $O(n)$ . Par l'hypothèse de récurrence, on peut écrire cet élément comme un produit de  $k$  réflexions  $S_i$  de  $E_n$ , que l'on peut étendre à  $E_{n+1}$  en posant  $S_i\mathbf{e}_{n+1} = \mathbf{e}_{n+1}$  (ce qui revient à prendre pour hyperplan de réflexion dans  $E_{n+1}$  l'hyperplan  $H_i \oplus \mathbb{R}\mathbf{e}_{n+1}$  où  $H_i$  est l'hyperplan (à  $n-1$  dimensions) de la réflexion  $S_i$  dans  $E_n$ ). On a ainsi  $SA = S_1S_2 \cdots S_k$  et donc puisque  $S^2 = I$ ,  $A = SS_1S_2 \cdots S_k$ .  $\square$

En particulier, tout élément de  $SO(3)$  peut s'écrire comme le produit de deux réflexions. Tout élément  $R$  de  $SO(3)$  est la matrice d'une rotation d'angle  $\varphi$  et d'axe  $\mathbf{n}$ ,  $R = r(\varphi, \mathbf{n})$ . En fait, le produit de deux réflexions dans des plans se coupant le long de l'axe de la rotation et formant un angle  $\varphi/2$  est égal à  $R$ .

### *Sous-groupes finis de $SO(3)$*

Soit  $G$  un sous-groupe fini de  $SO(3)$ . Comme l'origine est invariante par  $G$ , il est commode de considérer  $G$  comme un groupe agissant sur la sphère. Chaque rotation peut être ainsi vue comme une rotation autour d'un point de la sphère (une rotation d'angle  $\varphi$  autour de  $P$  étant la même chose qu'une rotation d'angle  $-\varphi$  autour du point antipodal).

On appelle **triangle sphérique** tout triangle sur la sphère dont les côtés sont des segments de grands cercles.

**Théorème 2.4.** *Si les sommets d'un triangle sphérique  $PQR$  sont ordonnés dans le sens horlogique et que  $p, q, r$  sont les angles respectifs à ces sommets, alors le produit des rotations d'angles  $2p, 2q$  et  $2r$  autour de  $P, Q$  et  $R$  est égal à l'identité.*

**Démonstration :** On exprime chacune des rotations comme produit de réflexions dans les grands cercles :  $RP, PQ$  pour la première ;  $PQ, QR$  pour la deuxième ; et  $QR, RP$  pour la troisième.  $\square$

Par conséquent, le produit des rotations d'angles  $2p$  et  $2q$  autour de  $P$  et  $Q$  est la rotation d'angle  $-2r$  autour de  $R$ .

*Sous-groupes finis de  $SO(3)$  ne possédant que des axes d'ordre 2* Le produit de deux demi-tours autour de  $P$  et  $Q$  est une rotation autour d'un des pôles du grand cercle passant par  $P$  et  $Q$  d'un angle  $-2r$

(ou de  $2r$  autour de l'autre pôle). On voit cela facilement en plaçant  $P$  et  $Q$  sur l'équateur, ce que l'on peut faire sans nuire à la généralité. Que vaut  $r$ ? Comme le sommet  $R$  du triangle sphérique est un des pôles, l'angle  $r$  en  $R$  est égal à l'angle  $POQ$  formé par les demi-droites  $OP$  et  $OQ$  passant par le centre  $O$  de la sphère. Cette rotation ne sera un demi-tour que si les axes  $OP$  et  $OQ$  sont perpendiculaires.

On peut donc uniquement considérer les groupes avec 1 axe d'ordre 2 ou 3 axes d'ordre 2 perpendiculaires.

On trouve donc que les seuls sous-groupes finis de  $SO(3)$  ne possédant que des axes d'ordre 2 sont  $C_2$  (groupe cyclique d'ordre 2 avec un seul axe d'ordre 2) et  $D_2$  (groupe diédral d'ordre 4 avec trois axes d'ordre 2 perpendiculaires).

*Sous-groupes finis de  $SO(3)$  possédant des axes d'ordre 2 mais ne possédant qu'un seul axe d'ordre  $p$  strictement plus grand que 2,  $p > 2$*  S'il y a un seul axe d'ordre  $p$ , celui-ci doit être perpendiculaire à tout axe d'ordre 2 qui serait présent. En effet, le pôle de l'axe d'ordre  $p$  est envoyé sur un autre pôle d'un axe d'ordre  $p$  sous une rotation de  $180^\circ$  autour de l'axe d'ordre 2. Comme cet axe est unique, il faut que le nouveau pôle soit le pôle antipodal de l'axe de départ. L'axe d'ordre 2 est donc perpendiculaire à celui d'ordre  $p$ . Les seules possibilités sont les groupes cycliques  $C_p$  d'ordre  $p$  et les groupes diédraux  $D_p$  d'ordre  $2p$  (avec  $p = 3, 4, 6$  si le groupe est cristallographique).

*Sous-groupes finis de  $SO(3)$  possédant plusieurs axes d'ordre strictement plus grand que 2* Soit  $OP$  un axe d'ordre  $p$ . Considérons tous les points sur la sphère correspondant à des axes d'ordre strictement plus grand que 2 et leur distance (sur la sphère) à  $P$ . Comme le sous-groupe est fini, il existe une plus petite distance parmi ces distances et donc un point  $Q_1$  à distance minimum de  $P$  définissant un axe d'ordre  $q$  strictement plus grand que 2. Des rotations successives d'angle  $\frac{2\pi}{p}$  autour de  $P$  amène  $Q_1$  sur les points  $Q_2, \dots, Q_p$  qui sont tous des centres d'ordre  $q$ . Ces points sont sur un petit cercle de centre  $P$  et de rayon  $PQ_1$ , qui ne possède aucun centre d'ordre strictement plus grand que 2 en son intérieur.

Considérons le produit de la rotation d'angle  $\frac{2\pi}{p}$  autour de  $P$  par la rotation d'angle  $\frac{2\pi}{q}$  autour de  $Q_1$ . C'est une rotation d'angle  $-\frac{2\pi}{r}$  autour du point  $R$  tel que le triangle sphérique  $PQ_1R$  a pour angles  $\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}$  et  $\frac{\pi}{r}$ . Le point  $R$  est donc sur la bissectrice de  $Q_1PQ_1$ . A ce stade, on ne peut dire que  $r$  est un entier (on peut avoir  $\frac{2\pi}{r} = k\frac{2\pi}{s}$ ) mais comme la somme des angles d'un triangle sphérique est strictement plus grande que  $\pi$ , on sait que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1.$$

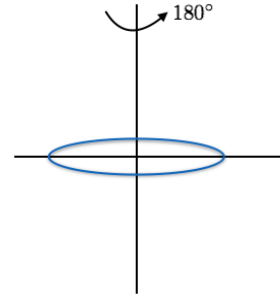


FIGURE 2.3:  $C_2 \simeq \mathbb{Z}_2$

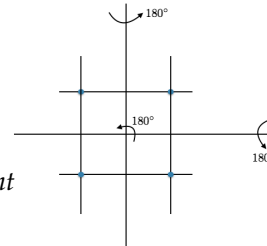


FIGURE 2.4:  $D_2 \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

Mais  $p \geq 3$  et  $q \geq 3$ . Donc  $r < 3$  et l'angle  $\frac{\pi}{q}$  en  $Q_1$  du triangle  $PQ_1R$  est plus petit que son angle  $\frac{\pi}{r}$  en  $R$ . Il en résulte que  $R$  est à l'intérieur du petit cercle<sup>2</sup> autour de  $P$  contenant les  $Q_i$ . Comme il n'y a pas d'axe d'ordre strictement plus grand que 2 dans cet intérieur,  $R$  est nécessairement un centre d'ordre 2. La rotation d'angle  $-\frac{2\pi}{r}$  est un demi-tour. Comme elle amène  $Q_p$  en  $Q_1$  (c'est le produit de la rotation d'angle  $\frac{2\pi}{p}$  autour de  $P$  par la rotation d'angle  $\frac{2\pi}{q}$  autour de  $Q_1$ ),  $R$  est sur le grand cercle joignant  $Q_p$  à  $Q_1$ . C'est donc le milieu du côté  $Q_pQ_1$  du polygone sphérique  $Q_1Q_2 \cdots Q_p$ .

Des rotations successives d'angle  $\frac{2\pi}{q}$  autour de  $Q_1$  transforme ce polygone régulier (d'angle  $\frac{2\pi}{p}$  et possédant  $p$  côtés) en un ensemble de  $q$   $p$ -gones réguliers entourant  $Q_1$ , dont chaque sommet est un centre d'ordre  $q$ . Continuant de la sorte en effectuant des rotations d'angle  $\frac{2\pi}{q}$  autour des autres centres d'ordre  $q$ , on recouvre toute la sphère par des  $p$ -gones réguliers.

Les transformés de  $Q_1$  sont donc les sommets d'un polyèdre régulier  $\{p, q\}$ , les transformés de  $P$  étant les centres des faces et les transformés de  $R$  les milieux des arêtes (projetés radialement sur la sphère). Le groupe  $G$  est un des groupes des polyèdres  $\{p, q\}$ .

*Résumé* La liste complète des sous-groupes finis de  $SO(3)$  est donnée par les groupes :

$$C_p, D_p, T, O, Y. \quad (2.14)$$

Parmi ceux-ci, il y a 11 groupes cristallographiques,

$$C_1 = \{e\}, C_2, C_3, C_4, C_6, D_2, D_3, D_4, D_6, T, O. \quad (2.15)$$

### *Les 32 groupes cristallographiques ponctuels*

Les groupes cristallographiques ponctuels sont par définition les sous-groupes finis cristallographiques de  $O(3)$ . Le sous-groupe d'un groupe cristallographique ponctuel qui contient les transformations de déterminant +1 est un sous-groupe fini cristallographique de  $SO(3)$  et donc un des onze groupes donnés ci-dessus. Ce sous-groupe est un sous-groupe normal d'indice 2.

On obtient le groupe cristallographique ponctuel le plus général en ajoutant de manière cohérente des "réflexion-rotations" (éléments de  $O(3)$  de déterminant  $-1$ ). Ce problème a été étudié systématiquement et conduit à 32 possibilités. La liste des 32 possibilités est donnée dans la littérature à laquelle nous renvoyons le lecteur intéressé. On y trouvera aussi, pour chacun des groupes cristallographiques ponctuels, la table des représentations irréductibles.

Les sous-groupes finis de  $O(3)$  apparaissent comme groupes de symétries de molécules. Les groupes cristallographiques ponctuels

2. Les angles sont égaux quand  $R$  est sur le petit cercle et que le triangle  $PQ_1R$  est isocèle.

apparaissent aussi dans l'études des groupes cristallographiques, c'-à-d., des sous-groupes du groupe euclidien  $IO(3)$  qui préserve un réseau ("réseau cristallin"). Ces groupes contiennent des translations et sont donc infinis (pas de point fixe). Il y a 230 groupes cristallographiques distincts. Soit  $G_\infty$  un groupe cristallographique. Les éléments de  $G_\infty$  sont de la forme  $(S, \vec{\tau})$  où  $S \in O(3)$  et  $\vec{\tau}$  est une translation ( $\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = S\vec{x} + \vec{\tau}$ ). Les  $S$  apparaissant dans  $G_\infty$  forment un sous-groupe fini cristallographique de  $O(3)$  qu'on appelle groupe ponctuel du réseau et qui doit être l'un des 32 groupes mentionnés ci-dessus. Les réseaux ayant le même groupe ponctuel appartiennent "à la même classe cristalline". Il y a donc 32 classes cristallines.

Chaque réseau est caractérisé par une cellule minimale, un parallépipède de volume minimal délimité par trois vecteurs  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  qui sont des translations minimales de  $G_\infty$ . On peut regrouper les 32 classes cristallines en 7 systèmes cristallographiques qui possèdent une forme commune de la cellule minimale. On dénote la longueur de  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  par  $a, b, c$  et leurs angles par  $\alpha, \beta, \gamma$  ( $\vec{b} \cdot \vec{c} = bc \cos \alpha$ , etc). On a

	Nom	Nombre de classes cristallines	Caractéristiques	Exemples physiques
A	Triclinique	2	$a \neq b \neq c, \alpha \neq \beta \neq \gamma$	Sulfate de Cuivre
B	Monoclinique	3	$a \neq b \neq c, \alpha = \gamma = 90^\circ \neq \beta$	Gypse
C	Orthorhombique	3	$a \neq b \neq c, \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	Plutonium
D	Rhombohédral	5	$a = b = c, \alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$	Quartz
E	Tétragonal	7	$a = b \neq c, \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	Etain
F	Hexagonal	7	$a = b \neq c, \alpha = \beta = 90^\circ; \gamma = 120^\circ$	Zinc
G	Cubique	5	$a = b = c, \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	Cuivre, Or, Diamant, Fer





# 3

## Représentation des groupes finis

Alors que la classification des groupes finis est une tâche ardue, la théorie des représentations des groupes finis peut être exposée en toute généralité en quelques dizaines de pages. Nous le ferons donc ici. Tous les outils présentés ici peuvent être appliqués pour un groupe fini *quelconque*.

### 3.1 Notions élémentaires

On considère dans ce cours uniquement les représentations *linéaires* que nous les appellerons simplement représentations.

*Représentation (Définition 1)* Soit  $G$  un groupe et  $V$  un espace vectoriel. On appelle **représentation** du groupe  $G$  dans l'espace  $V$  toute application  $T$  qui fait correspondre à chaque élément  $g \in G$  un opérateur linéaire  $T(g)$  de l'espace  $V$ , telle que

- $T(e) = I$  où  $e$  est le neutre de  $G$  et  $I$  l'application identité de  $V$
- $T(g_1 \star g_2) = T(g_1)T(g_2), \forall g_1, g_2 \in G$

L'espace  $V$  est appelé **espace de la représentation**  $T$ , la dimension de  $V$  est la **dimension de la représentation** et les opérateurs  $T(g)$  sont les **opérateurs de la représentation**.

En physique, l'espace vectoriel  $V$  a le rôle d'un espace d'états physiques du système sous considération ou espace de configuration. Le groupe de symétrie du système peut agir sur cet espace de configurations.

*Représentation (Définition 2)* De manière équivalente, une **représentation** de  $G$  dans l'espace  $V$  est un homomorphisme  $T$  de  $G$  dans le groupe  $GL(V)$  des opérateurs linéaires bijectifs de  $V$ .

Soit  $e_a$  une base de  $V$ . On utilisera par la suite la convention que  $e_a$  sont des covecteurs. Les matrices de représentation agissent donc comme une multiplication par la droite

Ici, les indices peuvent être placés en haut ou en bas en utilisant la métrique Euclidienne  $\delta^{ab}$  et  $\delta_{ab}$  définie sur l'espace vectoriel  $V$ . Nous garderons tous les indices en bas par convention.

$$T(g)e_a = e_b(T(g))_{ba} \quad (3.1)$$

Ainsi, si  $v = v_a e_a \in V$ , les composantes  $v_a$  dans la base se transforment sous multiplication matricielle comme un vecteur colonne,

$$(T(g)v)_a = (T(g))_{ab} v_b. \quad (3.2)$$

*Représentation fidèle* Une représentation est **fidèle** si l'homomorphisme  $T : G \mapsto GL(V)$  est injectif ( $\text{Ker}(T) = e$ ), de telle sorte que  $G$  est isomorphe à  $\text{Im}(T)$ .

*Représentation triviale* Une représentation de  $G$  est **triviale** si elle associe à tout  $g \in G$  l'opérateur identité. Dans ce cas,  $\text{Ker}(T) = G$ .

*Remarques*

- $\text{Ker}(T)$  est un sous-groupe normal de  $G$ . Comme un groupe simple n'a pas de sous-groupe normal non-trivial,  $\text{Ker}(T) = e$  ou  $\text{Ker}(T) = G$ . Donc, les représentations d'un groupe simple dans un espace  $V$  sont toutes fidèles, à l'exception de la représentation triviale.
- Si  $G$  est lui-même un groupe d'opérateurs linéaires, alors l'**application identique** de  $G$  sur  $G$  est elle-même une représentation  $T(g) = g$ .
- Soit  $H$  un sous-groupe de  $G$ . Toute représentation de  $G$  dans l'espace vectoriel  $V$  définit une représentation de  $H$  dans  $V$ , par restriction aux éléments de  $H$ .

*Entrelacement, Isomorphisme et Equivalence* Un **opérateur d'entrelacement** ou  **$G$ -morphisme**  $S : V_1 \mapsto V_2$  entre deux représentations  $(T_1, V_1)$  et  $(T_2, V_2)$  de  $G$  est une application linéaire telle que

$$ST_1(g) = T_2(g)S, \quad \forall g \in G. \quad (3.3)$$

Un **isomorphisme** est un opérateur d'entrelacement inversible. Deux représentations  $T^1$  et  $T^2$  sont dites **équivalentes**  $T^1 \sim T^2$  si elles sont isomorphes.

**Lemme 3.1** (Schur). Soient  $T^1$  et  $T^2$  deux représentations irréductibles de  $G$  et  $S$  un opérateur d'entrelacement entre  $T^1$  et  $T^2$ . Alors il y a deux cas possibles : soit  $S$  est un isomorphisme,  $T^1 \sim T^2$  et  $S = \lambda I$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  ou soit  $T^1 \approx T^2$  et  $S = 0$ .

*Démonstration.* Soient  $V_1$  et  $V_2$  les espaces des représentations  $T^1$  et  $T^2$ .  $\text{Ker}(S)$  et  $\text{Im}(S)$  sont des sous-espaces invariants respectivement de  $V_1$  et  $V_2$ . L'irréductibilité implique que soit  $\text{Ker}(S) = V_1$  et donc  $\text{Im}(S) = \emptyset$  c'est-à-dire  $S = 0$ , soit  $\text{Ker}(S) = \emptyset$  et donc  $\text{Im}(S) =$

Rappel : Un sous-espace  $M \subset V$  est invariant pour la représentation  $T$  s'il est invariant relativement à tous les opérateurs  $T(g)$ ,  $T(g)M \subset M$ ,  $\forall g \in G$ . Les sous-espaces triviaux  $\{0\}$  et  $V$  sont invariants. Une représentation est irréductible si elle ne possède pas de sous-espace invariant non-trivial. Une représentation qui n'est pas irréductible est appelée réductible.

$V_2$  c'est-à-dire  $S$  est un isomorphisme. Dans le cas  $T^1 \sim T^2$ , le polynôme en  $\lambda$   $\det(S - \lambda I) = 0$  a au moins une solution  $\lambda = \lambda_0$ . Alors  $\text{Ker}(S - \lambda_0 I) \neq 0$ . Le  $G$ -morphisme  $S - \lambda_0 I$  alors admet  $\text{Ker}(S - \lambda_0 I) = V_1$  c'est-à-dire  $S = \lambda_0 I$ .  $\square$

On considère dans ce cours uniquement les espaces vectoriels  $V$  muni d'un produit scalaire hermitien  $(w|v)$  avec  $v, w \in V$ , c'est-à-dire satisfaisant  $(w|v)^* = (v|w)$ .

En mécanique quantique, les éléments de  $V$  sont dénotés avec une notation *ket*  $|v\rangle$ ,  $v \in V$  tandis que les éléments de l'espace conjugué  $V^*$  sont dénotés avec un *bra*  $\langle w|$ ,  $w \in V^*$ . Le produit scalaire est dans cette notation  $\langle w|v\rangle = \langle w \cdot v \rangle$ .

*Représentation unitaire* Une représentation  $(T, V)$  de  $G$  est **unitaire** si  $V$  est muni d'un produit scalaire hermitien invariant sous l'action de  $G$ , c'est-à-dire

$$(T(g)w|T(g)v) = (w, v), \quad \forall g \in G. \quad (3.4)$$

*Caractère d'une représentation* Soit  $(T, V)$  une représentation du groupe  $G$ . Le **caractère** d'un élément  $g \in G$  est défini comme

$$\chi_V(g) = \text{tr}_V T(g). \quad (3.5)$$

On notera aussi souvent  $\chi_T$  en référence à la représentation  $T$ .

*Propriétés*

— Le caractère d'un élément du groupe dans une représentation donnée dépend uniquement de sa classe de conjugaison. En effet,

$$\chi_V(hgh^{-1}) = \chi_V(g), \quad \forall g, h \in G.$$

— Autres propriétés :

$$\chi_V(e) = \dim(V),$$

$$\chi_{V_1 \oplus V_2} = \chi_{V_1} + \chi_{V_2},$$

$$\chi_{V_1 \otimes V_2} = \chi_{V_1} \cdot \chi_{V_2},$$

$$\chi_{V^*} = \chi_V^*.$$

### 3.2 Représentation régulière

*Représentation régulière (Définition 1)* Soit  $G = \{e, g_1, \dots, g_{n-1}\}$  un groupe fini d'ordre  $n$ . Soit l'espace de représentation  $V_R \equiv \mathbb{C}^n$  muni du produit scalaire hermitien usuel  $(v|w) = v^* \cdot w$ ,  $\forall v, w \in V_R$ . On associe à chaque élément  $g_i$  de  $G$  un élément  $e_{g_i}$  de  $V_R$  tel que  $\{e_{g_i}\}$  soit une base orthonormée de  $V_R$ . La **représentation régulière** (à droite)  $T_R : G \mapsto GL(\mathbb{C}^n)$  est définie comme

$$T_R(g)e_h = e_{h*g^{-1}}, \quad \forall g, h \in G. \quad (3.6)$$

Pour  $\mathbb{Z}_3 = \{e, a, a^2\}$ , on associe

$$e \mapsto e_e \equiv (1 \ 0 \ 0),$$

$$a \mapsto e_a \equiv (0 \ 1 \ 0),$$

$$a^2 = a^{-1} \mapsto e_{a^2} \equiv (0 \ 0 \ 1).$$

Alors

$$T_R(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_R(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_R(a^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par définition, la représentation régulière consiste en  $n$  matrices de permutation des éléments de la base  $\mathbb{C}^n$ .

Pour les groupes finis, la représentation régulière a une importance capitale. On montrera plus tard qu'elle contient toutes les représentations irréductibles de  $G$ . Elle permettra de démontrer le théorème de Peter-Weyl. Dans ce but, nous allons donner une définition plus formelle de la représentation régulière.

On dénote

$$L^2(G)$$

l'espace de fonctions sur  $G$  à valeurs complexes. L'ensemble  $L^2(G)$  est un espace vectoriel puisque  $(\alpha f + \beta h)(g) = \alpha f(g) + \beta h(g)$ ,  $\forall f \in L^2(G)$  et  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . La dimension de  $L^2(G)$  est  $n$ , l'ordre du groupe puisque toute fonction  $f$  est complètement déterminée par les valeurs  $(f(g_1), \dots, f(g_n))$  qu'elle prend sur les  $n$  éléments  $g_i$  du groupe. On a donc en tant qu'espace vectoriel  $L^2(G) \simeq \mathbb{C}^n$ . Une base est donnée par les fonctions  $\{e_{g_i}\}$  telles que  $e_{g_i}(g_j) = \delta_{ij}$ . Tout  $f \in L^2(G)$  peut être écrit dans cette base comme

$$f = \sum_{g_i \in G} f(g_i) e_{g_i}. \tag{3.7}$$

*Représentation régulière (Définition 2)* A tout élément  $g \in G$  du groupe  $G$  on associe un opérateur linéaire  $T_R(g)$  agissant sur les fonctions  $f$  de  $L^2(G)$  par la relation

$$T_R(g)f = f_g \tag{3.8}$$

où la fonction  $f_g \in L^2(G)$  est définie par

$$f_g(h) = f(h \star g). \tag{3.9}$$

On vérifie l'équivalence des définitions. Suivant la définition (3.8),

$$\begin{aligned} (T_R(g_i)(e_{g_j}))(g_m) &= e_{g_j}(g_m g_i) \\ &= e_{g_j}(g_n) \\ &= \delta_{j,n} \end{aligned}$$

où  $g_n = g_m g_i$ . Le membre de droite est non nul ssi  $g_j = g_m g_i$  ou de manière équivalente  $g_j g_i^{-1} = g_m$ . On a donc

$$T_R(g_i)(e_{g_j}) = e_{g_j g_i^{-1}} \tag{3.10}$$

ce qui est la définition 3.6.

$L^2(G)$  est équipé du **produit hermitien moyen sur  $G$**  qui est un produit scalaire hermitien

On vérifie

$$T_R(a^2)e_{a^2} = (0 \ 0 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = e_e.$$

$$T_R(a^2)e_a = (0 \ 1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = e_{a^2}.$$

Par exemple, le caractère  $\chi_V$  d'une représentation  $(T, V)$  est un élément de  $L^2(G)$ .

On vérifie qu'il s'agit d'une représentation :

$$\begin{aligned} T_R(g_1 \star g_2)f(h) &= f(h \star g_1 \star g_2) \\ &= (T_R(g_2)f)(h \star g_1) \\ &= (T_R(g_1)(T_R(g_2)f))(h) \end{aligned}$$

d'où  $T_R(g_1 \star g_2) = T_R(g_1)T_R(g_2)$ .

On vérifie qu'elle est linéaire :

$$\begin{aligned} T_R(g)(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(h) &= (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(h \star g) \\ &= \alpha_1 f_1(h \star g) + \alpha_2 f_2(h \star g) \\ &= \alpha_1 T_R(g)f_1(h) + \alpha_2 T_R(g)f_2(h). \end{aligned}$$

On omettra en séances d'exercices le sous-indice  $M$  pour simplifier la notation. Dans ce syllabus, on gardera le sous-indice  $M$  vu qu'on définit d'autres produits scalaires.

$$(f_1|f_2)_M = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} f_1^*(g) f_2(g). \quad (3.11)$$

En particulier  $(f|f)_M = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} |f(g)|^2 \geq 0$  et  $(f|f)_M = 0$  ssi  $f(g) = 0 \forall g \in G$ .

**Proposition 3.1.1.** *La représentation régulière est unitaire pour le produit hermitien moyen.*

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} (T_R(g)f_1|T_R(g)f_2)_M &= \frac{1}{n} \sum_{h \in G} (T_R(g)f_1)^*(h) (T_R(g)f_2)(h) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{h \in G} f_1^*(hg) f_2(hg) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{h' \in G} f_1^*(h') f_2(h') \\ &= (f_1|f_2)_M \end{aligned}$$

avec  $h' = hg$  ( $h'$  parcourt le groupe une et une seule fois comme  $h$ ). □

### 3.3 Equivalence aux représentations unitaires et réductibilité

**Théorème 3.2.** *Toute représentation d'un groupe fini est équivalente à une représentation unitaire.*

*Démonstration.* Soit  $G$  un groupe fini d'ordre  $n$ ,  $V$  son espace de la représentation et  $(|)$  le produit hermitien sur  $V$ . Soient  $T(g)$  les opérateurs de la représentation. On n'a pas a priori  $(T(g)x|T(g)y) = (x|y)$ , mais on va montrer qu'il existe un isomorphisme  $S$  tel que  $(T'(g)x|T'(g)y) = (x|y)$  où  $T'(g) = ST(g)S^{-1}$ . A cette fin, on introduit le produit hermitien auxiliaire

$$(x|y)_G = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} (T(g)x|T(g)y)$$

qui est bien défini puisque la somme est finie.

On a

1.  $(x|y)_G = ((y|x)_G)^*$
2.  $(x|\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)_G = \alpha_1 (x|y_1)_G + \alpha_2 (x|y_2)_G$
3.  $(x|x)_G \geq 0$

avec  $(x|x)_G = 0$  ssi chacun des termes non négatifs  $(T(g)x|T(g)x)$  est nul et donc en particulier  $(T(e)x|T(e)x) = (x|x) = 0$  ce qui implique  $x = 0$ . Le produit  $(|)_G$  est donc bien hermitien.

En fait, la preuve s'applique également aux groupes infini-dimensionnels compacts et à leurs représentations finies. Il faut alors définir

$$(x|y)_G = \int_G d\tau (T(g)x|T(g)y).$$

Pour un groupe compact et une représentation finie, l'intégrale est finie.

Les opérateurs  $T(g)$  sont unitaires pour le produit scalaire auxiliaire  $(\cdot|\cdot)_G$ . En effet,

$$\begin{aligned} (T(g)x|T(g)y)_G &= \frac{1}{n} \sum_{g' \in G} (T(g')T(g)x|T(g')T(g)y) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{g' \in G} (T(g'g)x|T(g'g)y) \end{aligned}$$

Mais lorsque  $g'$  parcourt le groupe une et une seule fois, le produit  $g'g$  parcourt aussi le groupe une et une seule fois. Donc

$$(T(g)x|T(g)y)_G = \frac{1}{n} \sum_{h \in G} (T(h)x|T(h)y) = (x|y)_G.$$

La représentation  $T$  est donc bien unitaire pour  $(\cdot|\cdot)_G$ .

Soit  $\{\bar{e}_k\}$  une base orthonormée pour le produit scalaire hermitien auxiliaire et  $\{e_k\}$  une base orthonormée pour le produit de départ. On a  $e_k = S\bar{e}_k$  pour un certain opérateur inversible  $S$  (opérateur de changement de base). Comme  $(\bar{e}_k|\bar{e}_l)_G = \delta_{kl} = (e_k|e_l) = (S\bar{e}_k|S\bar{e}_l)$  pour tous  $k, l$ , on a aussi

$$(x|y)_G = (Sx|Sy), \quad (x|y) = (S^{-1}x|S^{-1}y)_G$$

pour tous vecteurs  $x, y \in V$ .

Soit  $T'(g) = ST(g)S^{-1}$ . Démontrons que les opérateurs  $T'(g)$  sont unitaires pour le produit scalaire hermitien de départ. On a :

$$\begin{aligned} (T'(g)x|T'(g)y) &= (ST(g)S^{-1}x|ST(g)S^{-1}y) \\ &= (T(g)S^{-1}x|T(g)S^{-1}y)_G \\ &= (S^{-1}x|S^{-1}y)_G \\ &= (x|y) \end{aligned}$$

ce qui démontre l'assertion.  $\square$

**Lemme 3.3.** Soit  $(T, V)$  une représentation unitaire et  $W \subseteq V$  un sous-espace invariant. Alors le complément  $W^\perp$  est aussi invariant.

*Démonstration.* Si  $v \in W^\perp$  alors  $(v|w) = 0, \forall w \in W$ . Soit  $w \in W$ , alors  $T(g)^{-1}w \in W$  par hypothèse. On a  $0 = (v|T(g)^{-1}w) = (T(g)v|w)$ . Donc  $T(g)v \in W^\perp, \forall g \in G, \forall v \in W^\perp$  et  $W^\perp$  est invariant.  $\square$

**Proposition 3.3.1.** Toute représentation unitaire est complètement réductible.

*Démonstration.* Soit  $V$  l'espace de représentation. Si la représentation est irréductible, il n'y a rien à démontrer. Supposons qu'elle est réductible. Soit  $W_1$  un sous-espace invariant. On a  $V = W_1 \oplus W_1^\perp$  en tant qu'espace vectoriel. De plus par le lemme précédent, la

somme est directe en tant qu'espace de représentation du groupe. On procède ensuite par itérations successives en décomposant  $W_1$  et  $W_1^\perp$ , avec  $W_1 = W_2 \oplus W_2^\perp$ , etc. La procédure se termine car  $V$  est fini.  $\square$

**Corollaire 3.3.1.** *Toute représentation d'un groupe fini se décompose comme une somme directe*

$$T = m_1 T_1 \oplus m_2 T_2 \oplus \cdots \oplus m_k T_k$$

*de représentations irréductibles. Pour décrire la représentation la plus générale, il faut connaître toutes les représentations irréductibles.*

C'est aussi vrai pour toute représentation finie d'un groupe compact.

### 3.4 Relations d'orthogonalité

Soient  $T^1, T^2, \dots$  des représentations irréductibles de  $G$  dans les espaces  $V^1, V^2, \dots$  qui peuvent être de dimensions distinctes. On suppose qu'elles sont unitaires pour le produit scalaire usuel dans  $V^i$ ,  $(w|v) = \sum_{k=1}^{\dim(V^i)} w_k^* v_k$ . On dénote par  $(t^1(g))_{ab}, (t^2(g))_{ij}, \dots$  les éléments de matrice des matrices  $T^1(g), T^2(g), \dots$  associées à  $g$  avec  $a, b, \dots = 1, \dots, \dim(V^1), i, j, \dots = 1, \dots, \dim(V^2), \dots$  Ils obéissent à la condition

$$(t^1(g^{-1}))_{ab} = \left( (t^1(g))_{ab} \right)^\dagger = t^1(g)_{ba}^* \dots$$

Les éléments de matrice  $(t^1)_{ab}$  sont des fonctions sur  $G$  à valeurs complexes et appartiennent donc à l'espace vectoriel  $L^2(G)$  défini précédemment dans le cadre de la représentation régulière. On rappelle que  $L^2(G)$  est équipé du produit scalaire moyen (3.11).

**Théorème 3.4** (Relations d'orthogonalité). *Soient  $T^1$  et  $T^2$  deux représentations irréductibles d'un groupe fini  $G$  et  $(t^1)_{ab}, (t^2)_{ij}$  les fonctions de  $L^2(G)$  correspondantes. Alors :*

— Si  $T^1$  et  $T^2$  sont inéquivalentes,

$$T^1 \not\sim T^2 \quad \Rightarrow \quad ((t^1)_{ab} | (t^2)_{ij})_M = 0, \quad \forall a, b, i, j$$

— Si  $T^1$  et  $T^2$  sont équivalentes, les indices  $i, j, \dots$  prennent les mêmes valeurs que  $a, b, \dots$  et

$$T^1 \sim T^2 \quad \Rightarrow \quad ((t^1)_{ab} | (t^1)_{cd})_M = \frac{1}{n_1} \delta_{ac} \delta_{bd} \quad \forall a, b, c, d$$

où  $n_1$  est la dimension de la représentation  $T^1$ .

*Démonstration.* Soit  $B$  un opérateur linéaire quelconque de  $V^2$  dans  $V^1$ . Posons

$$C = \frac{1}{n} \sum_g T^1(g) B T^2(g^{-1}).$$

On a :

$$\begin{aligned}
T^1(h) C &= T^1(h) \frac{1}{n} \sum_g T^1(g) B T^2(g^{-1}) \\
&= \frac{1}{n} \sum_g T^1(h) T^1(g) B T^2(g^{-1}) \\
&= \frac{1}{n} \sum_g T^1(hg) B T^2(g^{-1}) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{g'} T^1(g') B T^2(g'^{-1}h) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{g'} T^1(g') B T^2(g'^{-1}) T^2(h) \\
&= \left( \frac{1}{n} \sum_g T^1(g) B T^2(g^{-1}) \right) T^2(h) \\
&= C T^2(h)
\end{aligned}$$

où on a posé  $g' = hg$  et donc  $g^{-1} = g'^{-1}h$ , et utilisé le fait que si  $g$  parcourt le groupe une et une seule fois, il en est de même de  $g'$  ( $h$  est fixé). L'opérateur  $C$  est donc un opérateur d'entrelacement.

Par conséquent, si les représentations irréductibles  $T^1$  et  $T^2$  sont inéquivalentes,  $T^1 \approx T^2$ , on a  $C = 0$  par le lemme de Schur ( $\forall B$ ) ou encore, de manière explicite,

$$\frac{1}{n} \sum_{g \in G} \sum_{c=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{n_2} (t^1(g^{-1}))_{ac} B_{ck} (t^2(g))_{kj} = 0$$

où on a remplacé  $g$  par  $g^{-1}$  dans la somme sur le groupe. Comme la représentation  $T^1$  est unitaire, on peut récrire cette équation comme suit,

$$\frac{1}{n} \sum_{g \in G} \sum_{c=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{n_2} (t^1(g))_{ca}^* B_{ck} (t^2(g))_{kj} = 0$$

Prenons  $B_{ck} = \delta_{cb} \delta_{ki}$  (tous les éléments de matrice de  $B$  sont nuls, sauf l'élément en position  $(b,i)$  qui est égal à 1). La relation devient

$$\frac{1}{n} \sum_g (t^1(g))_{ba}^* (t^2(g))_{ij} = 0$$

c'-à-d

$$((t^1)_{ab} | (t^2)_{ij})_M = 0 \quad (T^1 \approx T^2).$$

Supposons à présent  $T^1 \sim T^2$ . Par le lemme de Schur, on sait que  $C = \lambda_B I$  où  $\lambda_B$  est une constante qui peut dépendre de  $B$ . Donc on a

$$\frac{1}{n} \sum_{g \in G} \sum_{\ell=1}^{n_1} \sum_{f=1}^{n_1} (t^1(g))_{ca}^* B_{\ell f} (t^1(g))_{fc} = \lambda_B \delta_{ac}.$$



Que vaut  $\lambda_B$  ? En prenant la trace de  $C$ , on obtient  $\text{tr } C = n_1 \lambda_B$ . Mais d'autre part, d'après la définition de  $C$ ,

$$\text{tr } C = \frac{1}{n} \sum_g \text{tr} \left( T^1(g) B T^1(g^{-1}) \right) = \frac{1}{n} \sum_g \text{tr } B = \text{tr } B$$

d'où l'on tire  $n_1 \lambda_B = \text{tr } B$ . Prenant  $B_{ef} = \delta_{eb} \delta_{fd}$  (tous les éléments de matrice de  $B$  sont nuls, sauf l'élément en position  $(b,d)$  qui est égal à 1), on obtient

$$\frac{1}{n} \sum_g ((t^1(g))_{ba}^* (t^1)_{dc}(g)) = \frac{1}{n_1} \delta_{ac} \delta_{bd}$$

(la trace de  $B$  vaut  $\delta_{bd}$ ), c'-à-d

$$((t^1)_{ab} | (t^1)_{cd})_M = \frac{1}{n_1} \delta_{ac} \delta_{bd}$$

après avoir réarrangé les indices et ignoré les transposées irrelevantes ici.  $\square$

**Corollaire 3.4.1.** *Les éléments de matrice  $(t^i)_{ab}$  des différentes représentations irréductibles forment un système orthogonal et en particulier libre<sup>1</sup> de  $L^2(G)$ . Comme  $L^2(G)$  est fini-dimensionnel, les  $(t^i)_{ab}$  sont en nombre fini et leur nombre ne peut dépasser l'ordre  $n$  du groupe ( $= \dim L^2(G)$ ). Il en résulte qu'il n'existe qu'un nombre fini ( $\leq n$ ) de représentations irréductibles deux à deux inéquivalentes d'un groupe fini.*

### 3.5 Théorèmes de Peter-Weyl et Burnside

*Système complet de représentations irréductibles* On dit qu'une famille  $T^1, \dots, T^m$  de représentations irréductibles d'un groupe  $G$  forme un **système complet** ssi

- les représentations  $T^1, \dots, T^m$  sont irréductibles et deux à deux inéquivalentes ;
- toute représentation irréductible de  $G$  est équivalente à une des représentations  $T^i$ .

**Théorème 3.5** (Peter-Weyl). *L'espace  $L^2(G)$  des fonctions complexes sur le groupe  $G$  admet une base orthonormée d'un système complet de représentations irréductibles  $T^1, \dots, T^m$  de  $G$ . Cette base est donnée par les éléments de matrice normés  $\sqrt{n_k} (t^i)_{ab}$  ( $i = 1, \dots, m$  et  $a, b, \dots = 1, \dots, n_i = \dim(V^i)$ ).*

*Démonstration.* Soit un système complet de représentations irréductibles  $T^1, \dots, T^m$  de  $G$ . On a déjà prouvé que leurs éléments de matrice sont linéairement indépendants (système libre) et orthogonaux. Ils sont orthonormés après les avoir normés comme  $\sqrt{n_k} (t^i)_{ab}$ .

Rappel : l'ensemble à valeurs dans  $\mathbb{R}$   $f_1, \dots, f_m$  est libre si  $\sum_{i=1}^m \alpha_i f_i = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$ .

1. En effet, si  $m$  fonctions  $f_1, f_2, \dots, f_m \in L^2(G)$  sont orthogonales deux à deux

$$(f_i | f_j) = 0, \quad i \neq j$$

et sont non-nulles

$$(f_i | f_i) \neq 0, \quad \forall i$$

alors les fonctions sont linéairement indépendantes, c'est-à-dire forment un système libre. (Preuve par l'absurde)

Il suffit donc de prouver que c'est un système complet, c-à-d que toute fonction  $f \in L^2(G)$  peut s'écrire comme combinaison linéaire des  $(t^i)_{ab}$ .

Considérons la représentation régulière  $T$  de  $G$ ,

$$T(g)f(h) = f(hg).$$

Comme elle est unitaire, elle est complètement réductible et peut s'écrire comme somme directe de représentations irréductibles,

$$L^2(G) = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_p$$

où les  $V_i$  sont des sous-espaces invariants tels que la restriction de  $T$  à  $V_i$  est irréductible et donc équivalente à une des représentations du système complet, soit  $T^{\ell(i)}$  pour une certaine fonction  $\ell$ .

En choisissant bien la base de  $V_i$ , on peut s'arranger pour que les éléments de matrice de  $T(g)$  restreints à  $V_i$  soient égaux à  $(t^{\ell(i)})_{ab}$ .

Si  $\{f_a^{\ell(i)}\}$  est cette base ( $a = 1, \dots, n_{\ell(i)}$ ), on a explicitement

$$T(g)f_a^{\ell(i)} = \sum_{b=1}^{n_{\ell(i)}} f_b^{\ell(i)} (t^{\ell(i)})_{ba}(g),$$

ou encore, puisque  $f_a^{\ell(i)} \in L^2(G)$

$$(T(g)f_a^{\ell(i)})(h) = \sum_{b=1}^{n_{\ell(i)}} f_b^{\ell(i)}(h) (t^{\ell(i)})_{ba}(g).$$

Mais par définition,  $(T(g)f_a^{\ell(i)})(h) = f_a^{\ell(i)}(hg)$ . Donc,

$$f_a^{\ell(i)}(hg) = \sum_{b=1}^{n_{\ell(i)}} f_b^{\ell(i)}(h) (t^{\ell(i)})_{ba}(g).$$

Prenons  $h = e$  et posons  $f_a^{\ell(i)}(e) = c_a^{\ell(i)}$ . On obtient ainsi :

$$f_a^{\ell(i)}(g) = \sum_{b=1}^{n_{\ell(i)}} c_b^{\ell(i)} (t^{\ell(i)})_{ba}(g).$$

Ceci montre que les fonctions  $f_a^{\ell(i)}$  sont combinaisons linéaires des fonctions  $(t^{\ell(i)})_{ba}$ . Comme la propriété est vraie pour chacun des sous-espaces invariants  $V_i$ , on en tire que toutes les fonctions de la base considérée de  $L^2(G)$  sont des combinaisons linéaires des  $(t^i)_{ba}$ , ce qui démontre bien que les  $\{(t^i)_{ab}\}$  forment un ensemble complet de fonctions de  $L^2(G)$ .  $\square$

**Théorème 3.6** (Burnside). *L'ordre  $n$  d'un groupe fini est égal à la somme des carrés des dimensions des représentations irréductibles d'un système complet de représentations de ce groupe,*

$$n = \sum_{i=1}^m (n_i)^2,$$

où  $m$  est le nombre de représentations irréductibles non-équivalentes.

*Démonstration.* Les  $\{(t^i)_{ab}\}$  forment une base de  $L^2(G)$ . Pour chaque  $i$ , on a  $(n_i)^2$  fonctions. Donc on a au total  $\sum_{i=1}^m (n_i)^2$  éléments dans la base  $\{(t^i)_{ab}\}$ . Mais d'autre part,  $\dim L^2(G) = n$ , ce qui implique le théorème.  $\square$

*Remarque* Parmi les  $n_i$ , il y a toujours au moins 1 car la représentation triviale à une dimension est irréductible.

Premier exemples :

$$\begin{aligned} 1 &= 1^2 && \\ 2 &= 1^2 + 1^2 && \mathbb{Z}_2 \\ 3 &= 1^2 + 1^2 + 1^2 && \mathbb{Z}_3 \\ 4 &= 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 && \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \end{aligned}$$

*Décomposition de la représentation régulière d'un groupe fini*

**Théorème 3.7.** *La représentation régulière  $T_R$  contient chaque représentation irréductible avec une multiplicité égale à sa dimension,*

$$T_R = n_1 T^1 \oplus n_2 T^2 \oplus \cdots \oplus n_m T^m.$$

*Démonstration.* Soit  $M_a^i$  le sous-espace à  $n_i$  dimensions de  $L^2(G)$  engendré par les fonctions  $(t_a^i)_b \equiv (t^i)_{ab}$  ( $b = 1, \dots, n_i$ ) où  $i$  et  $a$  sont fixés,

$$f \in M_a^i \Leftrightarrow f(g) = \sum_{b=1}^{n_i} f^b (t^i)_{ab}(g).$$

Par les relations d'orthogonalité, on a  $M_a^i \perp M_{a'}^{i'}$  pour  $i \neq i'$  ou  $a \neq a'$ . En outre, comme les  $(t^i)_{ab}$  forment une base, on a en tant qu'espaces vectoriels

$$L^2(G) = \bigoplus_{i,a} M_a^i.$$

Les sous-espaces  $M_a^i$  sont invariants pour la représentation régulière. Pour démontrer cette propriété, examinons l'action de  $T(g)$  sur la fonction  $(t^i)_{ab}$  de base de  $M_a^i$ ,

$$\left( T(g)(t^i)_{ab} \right) (h) = (t^i)_{ab}(hg).$$

Mais les  $T^i$  sont des représentations,  $T^i(hg) = T^i(h)T^i(g)$ , c'-à-d., en termes des éléments de matrice,

$$(t^i)_{ab}(hg) = \sum_{c=1}^{n_i} (t^i)_{ac}(h)(t^i)_{cb}(g),$$

ce qui montre que

$$\left( T(g)(t_a^i)_b \right) (h) = \sum_{c=1}^{n_i} (t_a^i)_c(h)(t^i)_{cb}(g),$$

ou encore

$$T(g)(t_a^i)_b = \sum_{c=1}^{n_i} (t^i)_{cb}(g)(t_a^i)_c \in M_a^i.$$

On voit également que les éléments de matrice de  $T|_{M_a^i}$  dans la base  $\{(t_a^i)_b\}$  ( $b = 1, \dots, n_i$ ) ne sont autres que les  $(t^i)_{ab}(g)$ . La représentation  $T|_{M_a^i}$  induite dans le sous-espace  $M_a^i$  est donc  $T^i$ . Comme  $a$  va de 1 à  $n_i$ , celle-ci apparaît  $n_i$  fois.  $\square$

Une autre démonstration sera donnée plus bas.

### 3.6 Caractères des représentations irréductibles

#### Relations d'orthogonalité des caractères

**Théorème 3.8.** Soient  $T^i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) un système complet de représentations irréductibles d'un groupe fini  $G$  et  $\chi_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) les caractères correspondants. Alors,

$$(\chi_i | \chi_j)_M = \delta_{ij}$$

où le produit hermitien moyen sur  $G$  est défini en (3.11).

*Démonstration.* On a  $\chi_i = \sum_{a=1}^{n_i} (t^i)_{aa}$ . Calculons  $(\chi_i | \chi_j)_M$  :

$$\begin{aligned} (\chi_i | \chi_j)_M &= \sum_{a=1}^{n_i} \sum_{\alpha=1}^{n_j} ((t^i)_{aa} | (t^j)_{\alpha\alpha})_M \\ &= \sum_{a,\alpha} \frac{1}{n_i} \delta_{ij} \delta_{a\alpha} \delta_{a\alpha} \\ &= \sum_{a=1}^{n_i} \frac{1}{n_i} \delta_{ij} \delta_{aa} \\ &= \delta_{ij}. \end{aligned}$$

$\square$

**Corollaire 3.8.1.** Les caractères  $\chi_i$  sont linéairement indépendants.

#### Caractères et classes d'équivalences

Les caractères ne dépendent que des classes d'équivalence d'éléments conjugués,  $\chi(g) = \chi(h^{-1}gh)$ . Considérons le sous-espace  $M$  de  $L^2(G)$  ne contenant que les fonctions constantes sur les classes d'éléments conjugués ou *fonctions des classes*,

$$f \in M \Leftrightarrow f(g) = f(h^{-1}gh) \quad \forall g, h \in G.$$

Si  $q$  est le nombre de classes d'équivalence d'éléments conjugués,  $M$  est un sous-espace vectoriel de dimension  $q$ .

**Théorème 3.9.** Les caractères  $\chi_1, \dots, \chi_m$  d'un système complet de représentations irréductibles d'un groupe fini  $G$  forment une base orthonormée de  $M$ .

*Démonstration.* Il suffit de montrer la complétude, c-à-d. que toute fonction  $f \in M$  peut s'écrire comme combinaison linéaire des caractères  $\chi_1, \dots, \chi_m$ . Comme les  $\{(t^i)_{ab}\}$  forment une base de  $L^2(G)$ , on a, pour toute fonction  $f \in M \subset L^2(G)$ ,

$$f(g) = \sum_{i=1}^m \sum_{a,b=1}^{n_k} C_{ab}^i (t^i)_{ab}(g)$$

Utilisons à présent le fait que  $f(g) = f(h^{-1}gh) \quad \forall h \in G$ . Ceci implique

$$f(g) = \sum_{i=1}^m \sum_{a,b=1}^{n_k} C_{ab}^i (t^i)_{ab}(h^{-1}gh).$$

Prenons la moyenne sur  $h$  de cette équation. Comme  $f(g)$  ne dépend pas de  $h$ , cela donne

$$f(g) = \sum_{i=1}^m \sum_{a,b=1}^{n_k} C_{ab}^i \frac{1}{n} \sum_{h \in G} (t^i)_{ab}(h^{-1}gh).$$

Mais  $T^i$  est une représentation unitaire,

$$(t^i)_{ab}(h^{-1}gh) = \sum_{c,d=1}^{n_i} (t^i)_{ca}^*(h) (t^i)_{cd}(g) (t^i)_{db}(h)$$

et donc,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{h \in G} (t^i)_{ab}(h^{-1}gh) &= \sum_{c,d=1}^{n_i} (t^i)_{cd}(g) (t_{ca}^i | t_{db}^i)_M \\ &= \sum_{c,d=1}^{n_i} (t^i)_{cd}(g) \frac{1}{n_i} \delta_{cd} \delta_{ab} \quad (\text{relations d'orthogonalité}) \\ &= \frac{1}{n_i} \chi_i(g) \delta_{ab} \end{aligned}$$

De là, il vient

$$\begin{aligned} f(g) &= \sum_{i=1}^m \frac{1}{n_i} \sum_{a,b=1}^{n_k} C_{ab}^i \chi_i(g) \delta_{ab} \\ &= \sum_{i=1}^m c^i \chi_i(g) \end{aligned}$$

avec  $c^i = \sum_{a=1}^{n_i} \frac{1}{n_i} C_{aa}^i$ . □

**Corollaire 3.9.1.** *Le nombre de représentations irréductibles inéquivalentes d'un groupe fini  $G$  est égal au nombre de classes d'éléments conjugués de  $G$ .*

*Caractères et équivalence des représentations d'un groupe fini*

Soit  $T$  une représentation quelconque de dimension finie du groupe  $G$ . On sait que  $T$  est complètement réductible et donc

$$T = m_1 T^1 \oplus m_2 T^2 \oplus \cdots \oplus m_m T^m$$

où  $m_i$  est la multiplicité de  $T^i$  dans  $T$ . On a donc, pour les caractères,

$$\chi_T = m_1 \chi_1 + m_2 \chi_2 + \cdots + m_m \chi_m.$$

Par conséquent,

**Proposition 3.9.1.** *Le coefficient de  $\chi_i$  dans la décomposition du caractère  $\chi_T$  de la représentation  $T$  dans la base des caractères  $\{\chi_i\}$  est égal à la multiplicité de  $T^i$  dans  $T$ .*

Si on connaît les caractères d'un système complet, on peut donc dire quelles représentations, et avec quelles multiplicités, apparaissent dans la représentation  $T$ .

En utilisant les relations d'orthogonalité, on tire ensuite

$$(\chi_T | \chi_T)_M = m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_m^2.$$

En particulier, on obtient

**Proposition 3.9.2.** *Soit  $T$  une représentation,*

$$(\chi_T | \chi_T)_M = 1$$

*ssi  $T$  est irréductible.*

Enfin, on a :

**Théorème 3.10.** *Deux représentations  $T$  et  $T'$  sont équivalentes ssi elles ont mêmes caractères.*

*Démonstration.* On sait la condition nécessaire. Elle est aussi suffisante. En effet, supposons  $\chi_T = \chi_{T'}$ . On a

$$T = m_1 T^1 \oplus m_2 T^2 \oplus \cdots \oplus m_m T^m$$

et

$$T' = m'_1 T^1 \oplus m'_2 T^2 \oplus \cdots \oplus m'_m T^m$$

ce qui implique

$$\chi_T = m_1 \chi_1 + m_2 \chi_2 + \cdots + m_m \chi_m$$

et

$$\chi_{T'} = m'_1 \chi_1 + m'_2 \chi_2 + \cdots + m'_m \chi_m.$$

L'égalité  $\chi_T = \chi_{T'}$  implique dès lors que toutes les multiplicités sont égales,  $m_i = m'_i$ , car les  $\chi_i$  forment une base. On en tire  $T \sim T'$ .  $\square$

### 3.7 Projecteurs sur sous-espace invariants

Étant donné une représentation  $T$  dans un espace  $V$  et une table des caractères  $\{\chi_i\}_{i=1}^m$  d'un système de représentations irréductibles  $\{T^i\}_{i=1}^m$ , nous pouvons connaître quelles représentations apparaissent dans  $T$  et quelles sont leurs multiplicités. Une question restante consiste à identifier le sous-espace invariant de  $V$  associé à une représentation irréductible  $T^i$  donnée ( $i$  fixé). On note  $V_i$  l'espace vectoriel de la représentation  $T^i$ .

Supposons que  $T$  contienne  $m_i$  fois  $T^i$ ,  $T = m_i T^i \oplus \dots$ . Soit

$$V = Y \oplus Y^\perp$$

où

- $Y$  est le sous-espace invariant associé à la représentation  $T^i$ , c'-à-d.,  $Y = Y_1 \oplus Y_2 \oplus \dots \oplus Y_{m_i}$  où  $Y_1 \simeq Y_2 \simeq \dots \simeq Y_{m_i}$  est isomorphe à l'espace  $V_i$  de la représentation  $T^i$  et  $T|_{Y_j} \sim T^i$  de sorte que  $T|_Y \sim m_i T^i$ ;
- $Y^\perp$  est le sous-espace invariant complémentaire tel que  $T|_{Y^\perp}$  ne contient pas  $T^i$ .

On veut déterminer  $Y$  et  $Y^\perp$ .

Pour ce faire, on va construire le projecteur sur  $Y$ , c'-à-d. l'opérateur linéaire  $\pi^{T^i}$  tel que  $\pi^{T^i}|_Y = I$ ,  $\pi^{T^i}|_{Y^\perp} = 0$  ce qui implique  $(\pi^{T^i})^2 = \pi^{T^i}$ . Connaissant  $\pi^{T^i}$ , on trouve  $Y$  et  $Y^\perp$  par les relations

$$Y = \text{Im } \pi^{T^i}, \quad Y^\perp = \text{Ker } \pi^{T^i}.$$

Nous avons

**Théorème 3.11.** *Le projecteur  $\pi^{T^i}$  est donné par l'expression :*

$$\pi^{T^i} = \frac{\dim T^i}{n} \sum_g \chi_i^*(g) T(g).$$

On dénote aussi  $\dim T^i = n_i$ .

*Démonstration.* Posons

$$\psi \equiv \frac{\dim T^i}{n} \sum_g \chi_i^*(g) T(g).$$

$\psi$  est un opérateur d'entrelacement de  $T$  avec elle-même :

$$\psi T(h) = T(h) \psi \quad \forall h \in G.$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\psi T(h) &= \frac{\dim T^i}{n} \sum_g \chi_i^*(g) T(g) T(h) \\
&= \frac{\dim T^i}{n} \sum_g \chi_i^*(g) T(gh) \\
&= \frac{\dim T^i}{n} \sum_g \chi_i^*(g) T(hg') \quad \text{avec } g' = h^{-1}gh \\
&= \frac{\dim T^i}{n} \sum_{g'} \chi_i^*(hg'h^{-1}) T(hg') \\
&= \frac{\dim T^i}{n} \sum_{g'} \chi_i^*(g') T(hg') \quad \text{car } \chi_i^*(hg'h^{-1}) = \chi_i^*(g') \\
&= \frac{\dim T^i}{n} \sum_{g'} \chi_i^*(g') T(h) T(g') \\
&= T(h) \frac{\dim T^i}{n} \sum_{g'} \chi_i^*(g') T(g') \\
&= T(h) \psi.
\end{aligned}$$

Soit  $R$  un sous-espace invariant,  $T(g)R \subset R$ . Comme  $\psi$  est une combinaison linéaire des opérateurs de la représentation, il est clair que l'image par  $\psi$  de  $R$  est incluse dans  $R$ ,  $\psi(R) \subset R$  et  $\psi|_R T(h)|_R = T(h)|_R \psi|_R$ . Supposons  $R$  irréductible. Par le lemme de Schur 3.1, il vient  $\psi|_R = \lambda I_R$ . Pour déterminer  $\lambda$ , on calcule  $\text{Tr } \psi|_R$ . On a

$$\begin{aligned}
\text{Tr } \psi|_R &= \frac{\dim T^i}{n} \sum_g \chi_i^*(g) \chi_{T|_R}(g) \\
&= \dim T^i (\chi_i | \chi_{T|_R})_M \\
&= \begin{cases} \dim T^i & \text{si } T|_R \sim T^i \\ 0 & \text{si } T|_R \not\sim T^i \end{cases}
\end{aligned}$$

D'autre part,  $\text{Tr}(\lambda I_R) = \lambda \dim R = \lambda \dim T|_R$ . On en conclut que  $\psi = I_R$  si  $T|_R \sim T^i$  et  $\psi = 0$  dans le cas contraire, c-à-d.  $\psi = \pi^{T^i}$ .  $\square$

Notons que la multiplicité  $m_i$  de  $T^i$  dans  $T$  est donnée par

$$m_i = (\chi_i | \chi_T)_M = \frac{\text{Tr}(\pi^{T^i})}{\dim T^i}. \quad (3.12)$$

*Représentation régulière* On rappelle que les opérateurs de la représentation régulière sont des matrices  $n \times n$  de permutations. Le neutre est l'identité  $T_R(e) = I_{n \times n}$  et les autres matrices dans la base canonique ont des zéros sur la diagonale (c'est une conséquence directe de (3.10)). On a donc

$$\text{Tr } T_R(e) = n, \quad \text{Tr } T_R(g_i) = 0, \quad \forall g_i \neq e. \quad (3.13)$$



On en redérive le Théorème 3.7 : chaque représentation irréductible de  $G$  apparaît dans la représentation régulière un nombre de fois égal à sa dimension. En effet, dans la représentation régulière,

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr} \pi^{T^i} &= \frac{\dim T^i}{n} \sum_g \chi_i^*(g) \mathrm{Tr} T_R(g) \\ &= \frac{\dim T^i}{n} \chi_i^*(e) \mathrm{Tr} T_R(e) \\ &= (\dim T^i)^2\end{aligned}$$

car  $\chi_i(e) = \dim T^i$ . De là et de (3.12), il vient que la multiplicité  $m_i$  de  $T^i$  dans  $T$  est égale à

$$m_i = \frac{\mathrm{Tr} \pi^{T^i}}{\dim T^i} = \dim T^i.$$

### 3.8 Décomposition d'une représentation quelconque en représentations irréductibles

Si on connaît les éléments de matrice  $\{(t^i)_{ab}(g)\}$  d'un système complet de représentations irréductibles, on peut pousser la décomposition de la représentation  $T$  (quelconque) jusqu'au bout.

On a

$$T = \bigoplus_{k=1}^m m_k T^k$$

et

$$V = \bigoplus_{k=1}^m Y^k$$

avec

$$Y^k = \bigoplus_{\alpha=1}^{m_k} Y_\alpha^k$$

où  $T|_{Y_\alpha^k} \simeq T^k$  et donc  $T|_{Y^k} \simeq m_k T^k$ . Les  $Y^k$  sont les sous-espaces invariants de la section précédente, obtenus par action des projecteurs

$$\pi^{T^k} = \frac{n_k}{n} \sum_g \chi_k^*(g) T(g)$$

( $\dim T^k = n_k$ ). Le problème est de trouver les sous-espaces invariants irréductibles  $Y_\alpha^k$ .

Lorsque la multiplicité  $m_k$  est  $> 1$ , la décomposition de  $Y^k$  en sous-espaces invariants n'est pas unique : alors que  $Y^k$  est bien défini, on verra que plusieurs choix sont possibles pour les sous-espaces invariants irréductibles  $Y_\alpha^k$ .

Pour arriver à la décomposition cherchée, on introduit pour tout  $i = 1, \dots, m$ , les  $n_i^2$  opérateurs :

$$\boxed{P_{ab}^i = \frac{n_i}{n} \sum_{g \in G} (t^i)_{ab}^*(g) T(g)} \quad \forall a, b = 1, \dots, n_i. \quad (3.14)$$

**Lemme 3.12.** Les opérateurs (3.14) obéissent aux propriétés suivantes :

1.  $\sum_{a=1}^{n_i} P_{aa}^i = \pi^{T^i}$
2.  $T(h)P_{ab}^i = \sum_{c=1}^{n_i} (t^i)_{ca}(h)P_{cb}^i$  et  $P_{ab}^i T(h) = \sum_{c=1}^{n_i} (t^i)_{bc}(h)P_{ac}^i$
3.  $P_{ab}^i P_{cd}^j = \delta_{ij} \delta_{bc} P_{ad}^i$
4.  $(P_{ab}^i)^\dagger = P_{ba}^i$ .

*Démonstration.* Ces propriétés se démontrent de la manière suivante :

1. Evident
2. On a :

$$\begin{aligned}
 T(h)P_{ab}^i &= \frac{n_i}{n} \sum_{g \in G} (t^i)_{ab}^*(g) T(h)T(g) \\
 &= \frac{n_i}{n} \sum_{g \in G} (t^i)_{ab}^*(g) T(hg) \\
 &= \frac{n_i}{n} \sum_{g \in G} (t^i)_{ab}^*(h^{-1}g') T(g') \quad (hg = g') \\
 &= \frac{n_i}{n} \sum_{g' \in G} \sum_{c=1}^{n_k} (t^i)_{ac}^*(h^{-1}) (t^i)_{cb}^*(g') T(g') \\
 &= \sum_{c=1}^{n_i} (t^i)_{ca}(h) P_{cb}^i
 \end{aligned}$$

car  $(t^i)_{ac}^*(h^{-1}) = (t^i)_{ca}(h)$  (les représentations sont unitaires). De même,

$$\begin{aligned}
 P_{ab}^i T(h) &= \frac{n_i}{n} \sum_{g \in G} (t^i)_{ab}^*(g) T(g)T(h) \\
 &= \frac{n_i}{n} \sum_{g \in G} (t^i)_{ab}^*(g) T(gh) \\
 &= \frac{n_i}{n} \sum_{g' \in G} (t^i)_{ab}^*(g'h^{-1}) T(g') \quad (gh = g') \\
 &= \frac{n_i}{n} \sum_{g' \in G} \sum_{c=1}^{n_i} (t^i)_{ac}^*(g') (t^i)_{cb}^*(h^{-1}) T(g') \\
 &= \sum_{c=1}^{n_i} (t^i)_{bc}(h) P_{ac}^i.
 \end{aligned}$$

3. Un calcul direct donne

$$\begin{aligned}
 P_{ab}^i P_{cd}^j &= \frac{n_i}{n} \sum_{g \in G} (t^i)_{ab}^*(g) T(g) P_{cd}^j \\
 &= \frac{n_i}{n} \sum_{g \in G} (t^i)_{ab}^*(g) \sum_{e=1}^{n_j} (t^j)_{ec}(g) P_{ed}^j \quad (\text{par 2 ci-dessus}) \\
 &= n_i \sum_{e=1}^{n_j} ((t^i)_{ab} | (t^j)_{ec})_M P_{ed}^j \\
 &= \delta_{ij} \delta_{bc} P_{ad}^i \quad (\text{par les relations d'orthogonalité})
 \end{aligned}$$

4. Enfin,

$$\begin{aligned}
(P_{ab}^i)^\dagger &= \frac{n_i}{n} \sum_{g \in G} (t^i)_{ab}(g) T(g)^\dagger \\
&= \frac{n_i}{n} \sum_{g \in G} (t^i)_{ab}(g) T(g^{-1}) \\
&= \frac{n_i}{n} \sum_{g' \in G} (t^i)_{ab}(g'^{-1}) T(g') \\
&= \frac{n_i}{n} \sum_{g' \in G} (t^i)_{ba}^*(g') T(g') \\
&= P_{ba}^i
\end{aligned}$$

□

Il résulte en particulier des propriétés démontrées ci-dessus que

$$P_{aa}^i P_{bb}^j = \delta_{ij} \delta_{ab} P_{aa}^i$$

et

$$(P_{aa}^i)^\dagger = P_{aa}^i.$$

Les  $P_{ab}^i$  forment un système de projecteurs orthogonaux. On définit  $V_a^i = P_{aa}^i V$ . Si  $v \in V_a^i$ , alors,  $v = P_{aa}^i v$ . Les sous-espaces  $V_a^i$  sont orthogonaux pour différentes valeurs de  $i$  ou  $a$ ,

$$V_a^i \perp V_b^j \quad \text{si } i \neq j \quad \text{ou } a \neq b.$$

Nous n'avons pas encore trouvé les  $Y_a^i$  mais on s'en rapproche...

**Proposition 3.12.1.**  $V = \bigoplus_{i=1}^m (\bigoplus_{a=1}^{n_i} V_a^i)$ .

*Démonstration.* Soit  $W = \bigoplus_{i=1}^m (\bigoplus_{a=1}^{n_i} V_a^i)$ . Soit  $v_0 \in V$  orthogonal à  $W$ ,  $(v_0|w) = 0$  pour tout  $w \in W$ . On aurait alors  $(v_0|P_{aa}^i v) = 0$  pour tout  $v \in V$  et donc  $(v_0|P_{ab}^i v) = (v_0|P_{aa}^i P_{ab}^j v) = 0$  pour tout  $v \in V$ . Mais ce dernier produit scalaire dans  $V$  peut se réécrire

$$\begin{aligned}
0 &= (v_0|P_{ab}^i v) \\
&= \left( v_0 \left| \frac{n_i}{n} \sum_{g \in G} (t^i)_{ab}^*(g) T(g) v \right. \right) \\
&= \frac{n_i}{n} \sum_{g \in G} (t^i)_{ab}^*(g) f(g) \quad \text{où on a posé } f(g) = (v_0|T(g)v) \\
&= n_i ((t^i)_{ab}|f).
\end{aligned}$$

Mais les  $\{(t^i)_{ab}\}$  forment une base de  $L^2(G)$ , donc la fonction  $f \in L^2(G)$  est nulle pour tout  $v \in V$ , c-à-d.,

$$f(g) = (v_0|T(g)v) = 0$$

pour tout  $g \in G$  et  $v \in V$ . Prenons  $v = v_0$  et  $g = e$  dans cette équation. On obtient  $(v_0|v_0) = 0$  et donc  $v_0 = 0$ . Le seul vecteur orthogonal à  $V$  est le vecteur nul et par conséquent,  $W = V$ . □

**Proposition 3.12.2.**  $P_{ab}^i$  applique isométriquement (et donc bijectivement)  $V_b^i$  sur  $V_a^i$ ,

$$P_{ab}^i V_b^i = V_a^i, \quad (P_{ab}^i v | P_{ab}^i w) = (v, w) \quad \forall v, w \in V_b^i.$$

*Démonstration.* Si  $v \in V_b^i \equiv P_{bb}^i V$ , alors  $P_{ab}^i v = P_{ab}^i P_{bb}^i v = P_{aa}^i P_{ab}^i v \in V_a^i$ . Donc  $P_{ab}^i V_b^i \subset V_a^i$ . Mais d'autre part,  $V_a^i = P_{aa}^i V_a^i = P_{ab}^i P_{ba}^i V_a^i \subset P_{ab}^i V_b^i$ , ce qui implique  $P_{ab}^i V_b^i = V_a^i$ . En fait, l'application  $P_{ab}^i : V_b^i \rightarrow V_a^i$  est non seulement bijective mais aussi isométrique car si  $v, w \in V_b^i$ , alors,  $(P_{ab}^i v | P_{ab}^i w) = (v | P_{ba}^i P_{ab}^i w) = (v | P_{bb}^i w) = (v | w)$ .  $\square$

On peut à présent effectuer la décomposition complète de  $V$ . On note que  $Y^i = \bigoplus_{a=1}^{n_i} V_a^i$ . Soit  $m_i$  la dimension commune des  $V_a^i$ . Comme on cherche  $Y^i = \bigoplus_{\alpha=1}^{m_i} Y_{\alpha}^i$ , on en déduit qu'il faut que l'espace  $Y_{\alpha}^i$  recherché soit de dimension  $n_i$ . Considérons d'abord  $V_1^i$ . Choisissons une base orthonormée  $\{e_{\alpha 1}\}$  ( $\alpha = 1, \dots, m_i$ ) de  $V_1^i$ ,

$$(e_{\alpha 1} | e_{\beta 1}) = \delta_{\alpha \beta}.$$

Cette base est définie à une transformation unitaire de  $V_1^i$  près. On définit ensuite  $e_{\alpha a}^i = P_{a1}^i e_{\alpha 1}^i$ . Les  $\{e_{\alpha a}^i\}$  ( $\alpha = 1, \dots, m_i$ ) forment une base orthonormée de  $V_a^i$ ,

$$(e_{\alpha a}^i | e_{\beta a}^i) = \delta_{\alpha \beta}$$

et de manière plus générale, on a

$$(e_{\alpha a}^i | e_{\beta b}^i) = \delta_{\alpha \beta} \delta_{ab}.$$

Soit  $Y_{\alpha}^i$  le sous-espace correspondant à une valeur de  $\alpha$  donnée, c'-à-d. le sous-espace à  $n_i$  dimensions engendré par les  $e_{\alpha a}^i$  ( $\alpha$  fixé,  $a = 1, \dots, n_i$ ).

**Proposition 3.12.3.** Les sous-espaces  $Y_{\alpha}^i$  sont invariants et  $T|_{Y_{\alpha}^i} \simeq T^i$ .

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned} T(g)e_{\alpha a}^i &= T(g)P_{a1}^i e_{\alpha 1}^i \\ &= \sum_{b=1}^{n_i} (t^i)_{ba}(g)P_{b1}^i e_{\alpha 1}^i \\ &= \sum_{b=1}^{n_i} (t^i)_{ba}(g)e_{\alpha b}^i, \end{aligned}$$

ce qui démontre l'assertion.  $\square$

La décomposition cherchée de  $Y^i$  est donc

$$Y^i = \bigoplus_{\alpha=1}^{m_i} Y_{\alpha}^i$$

A noter que pour les groupes de Lie compacts, tout le raisonnement est analogue ; il faut dans ce cas remplacer les sommes sur les éléments du groupe par l'intégrale invariante sur le groupe.

( $= \bigoplus_{a=1}^{n_i} V_a^i$ ). Elle n'est pas unique car il y a plusieurs manières de choisir la base de  $V_1^i$ . Une fois la base de  $V_1^i$  choisie, les sous-espaces invariants sont complètement déterminés par l'action du groupe. On peut voir  $Y_\alpha^i$  comme le sous-espace invariant contenant le vecteur  $e_{\alpha 1}$ . Les vecteurs  $e_{\alpha 1}$  "constituent  $m_i$  copies du premier vecteur de base" de la représentation  $T^i$  (dégénérée  $m_i$  fois), et chacun engendre un sous-espace invariant.



# 4

## *Système à trois ressorts et $S_3$*

Comme application concrète de la théorie des représentations, nous exposerons le cas d'un système mécanique qui admet la symétrie  $S_3$ . Nous commencerons par détailler les représentations de  $S_3$ .

### 4.1 Représentations de $S_3$

Le groupe des permutations de 3 objets est généré par

$$S_3 = \{e, (123), (132), (12), (13), (23)\}$$
$$g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6$$

Il y a trois classes d'éléments conjugués

$$C_1 = \{e\},$$
$$C_2 = \{(12), (13), (23)\},$$
$$C_3 = \{(123), (132)\}$$

Il y a donc 3 représentations inéquivalentes. La dimension des représentations est 1, 1 et 2 car  $6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$  est la seule possibilité.

*Les 2 représentations de dimension 1*

- La représentation triviale  $T^1 : g \mapsto 1$ . Les caractères sont tous  $\chi_1(g) = 1$ .
- La représentation alternée  $T^2$  où les permutations paires sont envoyées sur 1 et les impaires sont envoyées sur  $-1$ .

$$T^2(e) = T^2((123)) = T^2((132)) = 1,$$
$$T^2((12)) = T^2((13)) = T^2((23)) = -1.$$

La table des caractères est

$T^2$	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$	$g_6$
$\chi_2$	1	1	1	-1	-1	-1

La représentation  $T^3$  de dimension 2 On peut déduire les caractères à partir des relations d'orthogonalité. On a

	$e$	$(123), (132)$	$(12), (13), (32)$
$\chi_1$	1	1	1
$\chi_2$	1	1	-1
$\chi_3$	2	$a$	$b$

Les contraintes  $(\chi_1|\chi_3) = 0$  et  $(\chi_1|\chi_3) = 0$  sont  $2 + 2a + 3b = 0$  et  $2 + 2a - 3b = 0$  ce qui donne  $b = 0$  et  $a = -1$ . On vérifie  $(\chi_3|\chi_3) = 1$ .

On peut construire la représentation de plusieurs manières. On peut partir de la représentation  $T$  à trois dimensions donnée par les matrices de permutation  $\vec{e}_i \mapsto \vec{e}_{p(i)}$ . On calcule les caractères :

$$e \mapsto I_{3 \times 3}, \quad (12) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (123) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\chi_T(e) = 3, \quad \chi_T((12)) = 1, \quad \chi_T((123)) = 0.$$

On trouve la décomposition

$$\chi_T = \chi_1 + \chi_3.$$

On peut donc trouver la représentation  $T^3$  en décomposant la représentation  $T$  comme la somme directe de la représentation triviale et de  $T^3$ .

Une manière plus directe de procéder consiste à observer que  $S_3$  est isomorphe au groupe de symétrie du triangle équilatéral.

$$e \mapsto I_{2 \times 2},$$

$$(123) \mapsto \text{Rotation de } -120^\circ = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$(132) \mapsto \text{Rotation de } 120^\circ = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$(12) \mapsto \text{Réflexion selon } O_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

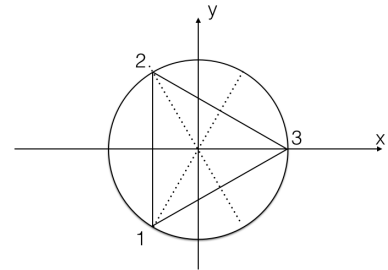
$$(13) \mapsto \text{Réflexion selon un axe de } -60^\circ = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$(23) \mapsto \text{Réflexion selon un axe de } 60^\circ = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Représentation régulière Dans la base des fonctions  $e_i, e_i(g_j) = \delta_{ij}$ . La définition de la représentation régulière

$$T_R(g)e_h = e_{hg^{-1}}$$

On prend la convention selon laquelle les matrices de permutation agissent à droite sur un vecteur ligne d'objets, comme (3.1).



Vérifions que le produit  $(13)(12) = (123)$  soit correctement représenté. Notons que l'on applique d'abord (12) et ensuite (13). Comme on agit sur des vecteurs lignes à gauche, on doit calculer

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ce qui donne bien le bon produit.





Il projette sur le sous-espace  $V_1 = \lambda x$ ,

$$x = \frac{1}{\sqrt{6}}(1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)$$

des covecteurs ayant toutes les composantes égales. Nous avons normé  $x \cdot x = 1$ . On vérifie la propriété d'invariance :  $T_R(g)V_1 \subset V_1 \forall g \in G$ . De plus, on a exactement  $T_R(g)x = x$ . La représentation  $T_R|_{V_1}$  est donc bien la représentation triviale  $T^1$ .

*Sous-espace invariant associé à  $T^2$*  Le projecteur vaut

$$\pi^{T^2} = \frac{1}{6} \sum_{g \in G} \chi_2^*(g) T_R(g) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il projette sur le sous-espace  $V_2 = \lambda y$ ,

$$y = \frac{1}{\sqrt{6}}(1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ -1).$$

On a  $T_R(g)y = \pm y$  avec le signe  $+$  si  $g$  est paire et  $-$  si  $g$  est impaire. La représentation  $T_R|_{V_2}$  est donc bien la représentation alternée  $T^2$ . Aussi, les deux vecteurs propres  $x, y$  de  $T_R(g)$  sont orthogonaux,  $x \cdot y = 0$ .

*Sous-espace invariant associé à  $T^3$*  Le projecteur vaut

$$\pi^{T^3} = \frac{2}{6} \sum_{g \in G} \chi_3^*(g) T_R(g) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On cherche les covecteurs  $v$  tels que  $v\pi^{T^3} = \lambda v$ . Après un peu d'algèbre on trouve que les composantes  $v_i$  de  $v$  obéissent à  $v_1 + v_2 + v_3 = 0$  et  $v_4 + v_5 + v_6 = 0$ . De tels covecteurs forment un espace vectoriel  $V_3$  à 4 dimensions. La représentation est donc réductible, et on a  $T_R|_{V_3} = 2T^3$ . Pour mettre en évidence les deux représentations  $T^3$  on décompose  $V_3$  comme  $V_3 = V_3^1 \oplus V_3^2$  où  $V_3^1 \simeq V_3^2$  est bidimensionnel.

La base de  $V_3^1$  dans laquelle la représentation de  $S_3$  est donnée par les matrices  $2 \times 2$  données en (4.1) est caractérisée par la propriété

que les covecteurs de base sont les vecteurs propres de  $T^3((12)) = T^3(g_4)$  pour les valeurs propres  $-1$  et  $1$ .

Cherchons donc dans  $V_3$  les vecteurs propres de  $T_R(g_4)$  pour la valeur propre  $1$  :

$$(v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \ v_5 \ v_6) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \ v_5 \ v_6)$$

On a  $v_4 = v_1, v_5 = v_2, v_6 = v_3$ . Les vecteurs doivent aussi appartenir à  $V_3$ . On a deux solutions linéairement indépendantes. Il est intéressant de choisir une base orthonormée. Par exemple :

$$v \equiv \frac{1}{2}(1 \ -1 \ 0 \ 1 \ -1 \ 0),$$

$$v' \equiv \frac{1}{2\sqrt{3}}(1 \ 1 \ -2 \ 1 \ 1 \ -2).$$

On peut définir le sous-espace  $V_3^1$  comme le sous-espace invariant qui contient  $v$ , et le sous-espace  $V_3^2$  comme le sous-espace invariant qui contient  $v'$ .

On trouve  $V_3^1$  en agissant avec un autre élément de la représentation, par exemple  $T_R(g_2)$ . On trouve  $T_R(g_2)v = \frac{1}{2}(-1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ -1)$ . Comme

$$T^3(g_2)(1 \ 0) = (1 \ 0) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{2} \ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

il est plus naturel de choisir comme deuxième covecteur de base dans  $V_3^1$

$$w \equiv -\frac{2}{\sqrt{3}} \left[ T_R(g_2) + \frac{1}{2} T_R(g_4) \right] v = \frac{1}{2\sqrt{3}}(1 \ 1 \ -2 \ -1 \ -1 \ 2)$$

Le covecteur  $w$  est clairement dans  $V_3^1$  et est vecteur propre de  $T_R(g_4)$  pour la valeur propre  $-1$ . Il est aussi orthogonal à  $v$ ,  $w \cdot v = 0$ , et normé  $w \cdot w = 1$ . Le sous-espace  $V_3^1$  généré par  $v$  et  $w$  est invariant car il est invariant sous  $T_R(e)$ ,  $T_R((12))$  et  $T_R((123))$  qui génèrent tout le groupe. Dans ce sous-espace,  $T_R$  se réduit à  $T^3$  et les vecteurs sont représentés par  $v = (1 \ 0)$ ,  $w = (0 \ 1)$ .

On définit similairement le second covecteur de base  $w'$  de  $V_3^2$  comme

$$w' \equiv -\frac{2}{\sqrt{3}} \left[ T_R(g_2) + \frac{1}{2} T_R(g_4) \right] v' = \frac{1}{2}(1 \ -1 \ 0 \ -1 \ 1 \ 0).$$

qui obéit à  $w' \cdot v' = 0$ ,  $w' \cdot w' = 1$ .

*Base bloc diagonale* En prenant les 6 covecteurs de base  $x, y, v, w, v', w'$  comme nouvelle base, on ramène toutes les matrices  $T_R(g)$  à une forme diagonale par blocs. Plus précisément, on construit la matrice  $O$  orthogonale,  $O^T O = I$ , comme

$$O = \begin{pmatrix} x \\ y \\ v \\ w \\ v' \\ w' \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

et on vérifie l'égalité

$$O T_R(g) O^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & T^2(g) & & \\ & & T^3(g) & \\ & & & \tilde{T}^3(g) \end{pmatrix}.$$

où la représentation  $\tilde{T}^3$  est équivalente à la représentation  $T^3$ ,  $\tilde{T}^3 \sim T^3$ . Ses matrices de représentation sont données explicitement par

$$\tilde{T}^3(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} T^3(g) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On peut absorber cette transformation de similitude en changeant l'orientation de  $w', w' \mapsto -w'$ . Appelons  $O'$  la matrice

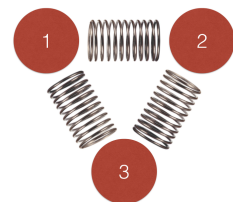
$$O' = \begin{pmatrix} x \\ y \\ v \\ w \\ v' \\ -w' \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Elle est toujours orthogonale et on a

$$O' T_R(g) O'^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & T^2(g) & & \\ & & T^3(g) & \\ & & & T^3(g) \end{pmatrix}.$$

#### 4.2 Modes d'oscillation d'un système de 3 ressorts identiques

On considère trois masses ponctuelles égales attachées par des ressorts identiques. Les masses sont libres de se déplacer sans frottement sur une surface plane. Les seules forces en jeu sont les forces de rappel des ressorts.



Les positions 1,2,3 forment un triangle équilatéral de longueur  $\ell$  où  $\ell$  est la longueur des ressorts à l'équilibre. Soient  $(\bar{x}_1, \bar{y}_1; \bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{x}_3, \bar{y}_3)$  les coordonnées d'une position d'équilibre. On pose

$$x_i = \bar{x}_i + u_i \quad (4.5)$$

$$y_i = \bar{y}_i + v_i \quad (4.6)$$

pour tout  $i = 1, 2, 3$ . Les  $q^a \equiv (u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3)$ ,  $a = 1, \dots, 6$  mesurent le déplacement du système par rapport à la configuration d'équilibre.

L'énergie potentielle d'un ressort est donnée par  $\frac{k}{2}\Delta\ell$  où  $\Delta\ell$  est l'élongation du ressort par rapport à sa position d'équilibre et  $k$  sa raideur. Dans l'approximation des petits déplacements, l'Hamiltonien est donné par

$$H = \frac{1}{2}m \sum_{i=1,2,3} (\dot{u}_i^2 + \dot{v}_i^2) + \frac{k}{2}V_{ab}q^a q^b \quad (4.7)$$

$$= \frac{m}{2} \sum_{a=1}^6 (\dot{q}^a)^2 + \frac{k}{2}V_{ab}q^a q^b \quad (4.8)$$

pour une matrice  $V_{ab}$  symétrique que l'on peut calculer à partir de la géométrie du problème.

On aimerait trouver les modes propres du système, c'.à.d. diagonaliser la matrice  $6 \times 6$   $V_{ab}$ .

*Invariance sous  $S_3$*  La recherche des modes propres est grandement simplifiée si l'on tient compte des symétries. Le système est en effet invariant sous les transformations de symétrie du triangle équilatéral, c'.à.d.  $S_3$ .

Les  $q^a$  forment une représentation  $T$  à 6 dimensions. Sous la transformation  $q^{a'} = T_{ab}q^b$ , l'invariance du système requiert l'invariance du terme cinétique et potentiel. Le terme cinétique est préservé ssi  $T_{ab}$  est une matrice orthogonale,  $T_{ab} \in O(6)$ . Le terme potentiel est préservé sous la condition

$$V_{ab}q^{a'}q^{b'} = V_{ab}T_{ac}T_{bd}q^c q^d = V_{cd}q^c q^d$$

ce qui se lit en forme matricielle comme  $T^T V T = V$  ou encore

$$V T(g) = T(g) V$$

après avoir utilisé  $T^T = T^{-1}$ . Les matrices  $V$  et  $T(g)$  sont donc entrelacées.

On remarque que chaque action de  $S_3$  peut être décomposée en une permutation  $p(i)$  des masses  $i$  et une action ponctuelle sur chaque masse :

$$\begin{pmatrix} u'_i \\ v'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{p(i)} \\ v_{p(i)} \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Les équations du mouvement sont  $m\ddot{q}^a = -kV_{ab}q^b$ . Les modes propres correspondent aux solutions  $q^a = e^{i\omega t}\zeta^a$  telles que  $V_{ab}\zeta^b = \frac{m\omega^2}{k}\zeta^a$ . Les fréquences propres  $\omega_a$  sont donc données en termes des valeurs propres  $\lambda_a$  de  $V_{ab}$  comme  $\omega_a = \sqrt{\frac{k\lambda_a}{m}}$ .

La représentation  $T$  est donc un produit direct

$$T = \tilde{T} \otimes S$$

où  $\tilde{T}$  est la représentation de dimension 2 ponctuelle et  $S$  est la représentation de dimension 3 qui permute les masses. Il n'y a qu'une représentation de dimension 2, la représentation irréductible  $T^3$  donc  $\tilde{T} \simeq T^3$ . Nous avons vu que la représentation des matrices de permutations  $3 \times 3$  est réductible et se décompose comme

$$S = T^1 \oplus T^3.$$

Nous avons donc

$$T = T^3 \otimes (T^1 \oplus T^3) = (T^3 \otimes T^1) \oplus (T^3 \otimes T^3).$$

Il est clair que  $T^3 \otimes T^1 = T^3$ <sup>1</sup>. Pour identifier  $T^3 \otimes T^3$  on calcule  $\chi_3(e)\chi_3(e) = 4$ ,  $\chi_3((123))\chi_3((123)) = 1$ ,  $\chi_3((12))\chi_3((12)) = 0$ . On trouve la décomposition  $\chi_3\chi_3 = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3$  et par conséquent

$$T^3 \otimes T^3 = T^1 \oplus T^2 \oplus T^3.$$

En conclusion

$$T = T^1 \oplus T^2 \oplus 2T^3 \simeq T_R$$

ce qui est en fait équivalent à la représentation régulière. Bien entendu, la base utilisée pour  $q^a$  est celle basée sur la géométrie du problème alors que la base utilisée dans les sections précédentes est la base canonique de la représentation régulière.

Comme on l'a vu, il existe une base dans laquelle  $T$  prend la forme

$$T(g) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & T^2(g) & & \\ & & T^3(g) & \\ & & & T^3(g) \end{pmatrix}$$

Comme la matrice  $V$  est une matrice d'entrelacement et est orthogonale, elle doit prendre la forme

$$V = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \alpha I_{2 \times 2} & \beta I_{2 \times 2} \\ & & \beta I_{2 \times 2} & \gamma I_{2 \times 2} \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

La méthode directe pour obtenir les modes de vibration consiste à calculer la matrice  $V_{ab}$  à partir de sa définition, trouver la base dans laquelle elle prend la forme (4.10) en utilisant les projecteurs et obtenir les valeurs et vecteurs propres.

Ici, nous donnons simplement les quatre modes de vibrations résultants :

1. On le vérifie en utilisant les caractères :  $\chi_3(g)\chi_1(g) = \chi_3(g)$ ,  $\forall g \in S_3$ .

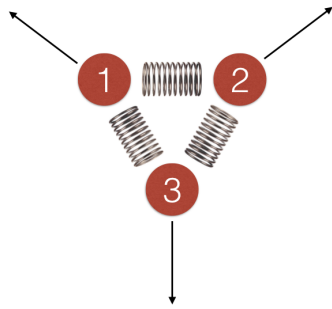


FIGURE 4.1: Mode de respiration. Représentation  $T^1$ . Le vecteur correspondant est

$$\zeta^a = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}; 0, -1\right).$$

Le triangle garde sa forme mais croît ou décroît. Il est clair que ce vecteur est invariant sous toutes les transformations de  $S_3$ . La valeur propre est non-nulle car elle change l'énergie potentielle.

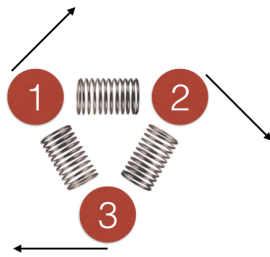


FIGURE 4.2: Mode de rotation. Représentation  $T^2$ . Le vecteur correspondant est

$$\zeta^a = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}; 1, 0\right).$$

Le triangle reste identique. Il est clair que ce vecteur est invariant sous  $A_3$  mais change de signe sous réflexions. La valeur propre est 0.

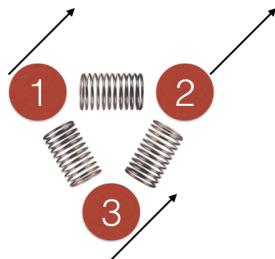


FIGURE 4.3: Mode de translation. Représentation  $T^3$ . Les deux vecteurs correspondants sont les translations selon  $x$  et selon  $y$  :

$$(1, 0; 1, 0; 1, 0)$$

$$(0, 1; 0, 1; 0, 1)$$

Ce sont des vecteurs propres de valeur propre 0.

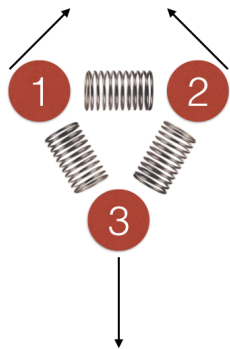


FIGURE 4.4: Mode de déformation. Représentation  $T^3$ . Ce sont les modes intrinsèques à la géométrie du système.





# 5

## *Groupes et algèbres de Lie*

La théorie des groupes est l'étude de la symétrie. Quand un système physique admet une symétrie, les observables forment une représentation du groupe concerné. Le groupe des rotations, celui de Lorentz et de Poincaré, qui sont tous les groupes de Lie, en sont des exemples très importants. Aussi, les groupes de Lie sont omniprésents en physique des particules. En effet, le modèle standard des particules élémentaires est basé sur la théorie de jauge de Yang-Mills dont le groupe de jauge est le groupe de Lie compact

$$SU(3) \times SU(2) \times U(1). \quad (5.1)$$

Nous verrons également vers la fin du cours un autre exemple dans le domaine des particules élémentaires où le groupe  $SU(3)$  est relevant. Le groupe des rotations ainsi que  $SU(2)$  et  $SU(3)$  tombent dans la catégorie des groupes de Lie matriciels compacts pour lesquels il existe une classification complète et élégante. Nous nous attacherons dans ce cours à développer la caractérisation générale des groupes de Lie matriciels compacts et de leur représentations en introduisant tous les outils nécessaires. Nous décrirons en détail les représentations de l'algèbre  $SU(3)$  ce qui permettra d'illustrer l'importance et la puissance contraignante des symétries en physique.

### *5.1 Groupes de Lie matriciels*

*Groupe* Un groupe est un ensemble d'éléments muni d'une opération associative  $\star : G \times G \rightarrow G$  avec un neutre et un inverse pour chaque élément. Plus précisément, (1)  $\exists e \in G$  tel que  $\forall g \in G, g \star e = e \star g = g$ ; (2)  $\forall g \in G, \exists g^{-1} \in G$  tel que  $g \star g^{-1} = e = g^{-1} \star g$ .

Nous omettrons l'opérateur  $\star$  par la suite pour simplifier la notation.

*Groupe fini* Un groupe fini est un groupe avec un nombre fini d'éléments. L'ordre d'un groupe fini est le nombre d'éléments du groupe et sera usuellement dénoté  $n$ .

*Variété analytique* Une variété  $M$  de dimension  $n$  est analytique si elle possède un atlas analytique, c'est-à-dire une collection de cartes qui couvrent la variété et qui sont reliés par des transformations analytiques. Dans ce cours nous considérerons des variétés dont les cartes sont à valeur dans  $\mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{C}^n$ . On parle dans ce cas de variétés analytiques réelles ou complexes.

*Groupe de Lie* Un groupe de Lie est un ensemble qui est en même temps un groupe et une variété analytique telle que l'application  $\mu : (g_1, g_2) \rightarrow g_1 g_2^{-1}$  du produit direct  $G \times G$  dans  $G$  est analytique. Cette dernière contrainte est équivalente à demander que les deux opérations de groupe :  $(g_1, g_2) \rightarrow g_1 g_2$  et  $g_1 \rightarrow g_1^{-1}$  soient des applications analytiques. Un groupe de Lie est réel ou complexe dépendant du champ sur lequel la variété analytique est considérée.

Dans ses travaux, S. Lie prouva que l'on pouvait substituer la requête de l'analyticité en faveur de la continuité et deux fois différentiabilité (non-démontré ici) :

*Seconde définition d'un groupe de Lie* Soit un groupe  $G$  qui est aussi une variété deux fois continue différentiable et telle que l'application  $\mu : (g_1, g_2) \rightarrow g_1 g_2^{-1}$  du produit direct  $G \times G$  dans  $G$  est deux fois continue différentiable, alors  $G$  est un groupe de Lie.

Par exemple, le groupe des transformations linéaires sur les réels ou les complexes  $GL(n, \mathbb{R})$  ou  $GL(n, \mathbb{C})$  ou leur sous-groupes sont des groupes de Lie. Le groupe de Lorentz  $SO(3, 1)$ , le groupe de Poincaré, le groupe des transformations unitaires  $U(n)$  ou encore unitaires de déterminant unité  $SU(n)$  sont des exemples importants en physique. En fait tous ces groupes de Lie peuvent être formulés en termes de matrices. Nous introduisons donc la définition suivante :

*Groupes de Lie matriciels* L'espace des matrices  $n \times n$  réelles est isomorphe à  $\mathbb{R}^{n^2}$  ; l'espace des matrices  $n \times n$  complexes est isomorphe à  $\mathbb{R}^{2n^2}$ . On appelle groupe de Lie matriciel tout groupe de matrices qui est aussi une surface régulière de  $\mathbb{R}^{n^2}$  ou  $\mathbb{R}^{2n^2}$ .

Soit  $G$  un groupe de Lie matriciel de dimension  $n$ . On introduit des coordonnées  $a^k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) sur  $G$ . Par exemple, pour le groupe des rotations  $SO(3)$ , les  $a^k$  peuvent être les angles d'Euler, ou les coordonnées cartésiennes d'une boule fermée de rayon  $\pi$ , obéissant donc à  $(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 \leq \pi$  (avec identification des points antipodaux du bord de la boule, ce qui implique des conditions de périodicité sur les fonctions continues mais n'a pas d'incidence sur l'intégration, l'identification concernant un sous-ensemble de mesure nulle). On notera par  $D \subset \mathbb{R}^n$  le domaine de variation des

Le concept de variété analytique date de B. Riemann et F. Klein mais a seulement été formulé précisément par H. Weyl en 1955. Il formalise la notion d'un espace continu et lisse.

Les groupes de Lie ont été introduits en mathématiques par Sophus Lie dans les années 1870 dans le contexte de la problématique de la résolution des équations différentielles et dans la recherche des groupes de transformation continus.

Soient  $z^A$  ( $A = 1, \dots, q$ ) des coordonnées sur  $\mathbb{R}^q$ . Une surface régulière de dimension  $p$  de  $\mathbb{R}^q$  est un sous-ensemble  $\Sigma$  de  $\mathbb{R}^q$  défini par des équations  $F^i(z^A) = 0$  ( $i = 1, \dots, q - p$ ) où les fonctions  $F^i$  sont différentiables et telles que la matrice  $(q - p) \times q$  des dérivées partielles  $\frac{\partial F^i}{\partial z^A}$  est de rang maximum  $q - p$  partout sur  $\Sigma$ . Une surface régulière est fermée et est une variété différentiable. Le produit matriciel et l'opération de prendre l'inverse sont des opérations différentiables.

coordonnées  $a^k$  correspondant à  $G$  (modulo éventuellement un sous-ensemble de mesure nulle).

Le produit sur  $G$  définit une fonction  $\Phi : D \times D \rightarrow D$  de la manière suivante. Si  $g(a^k)$  est l'élément du groupe de coordonnées  $a^k$  et  $g(b^k)$  celui de coordonnées  $b^k$ , alors le produit  $g(a^k)g(b^k)$  a pour coordonnées  $\Phi^k(a^k; b^k)$ . Dans la suite, nous omettrons les indices sur les coordonnées quand elles sont arguments de fonctions et écrirons donc  $g(a)$ ,  $g(b)$ ,  $\Phi^k(a; b)$  etc.

Si  $a^k = 0$  sont les coordonnées du neutre, on a évidemment :

$$\Phi^k(0; b) = b^k; \quad \Phi^k(a; 0) = a^k.$$

L'associativité impose en outre la relation :

$$\Phi^k(\Phi(a; b); c) = \Phi^k(a; \Phi(b; c)).$$

*Exemples simples* Le groupe des translations de l'espace  $\mathbb{R}^n$  peut être paramétrisé par  $\mathbb{R}^n$  lui-même, l'action d'une translation de coordonnées  $a^k$  sur un point  $x^k$  de  $\mathbb{R}^n$  étant :

$$x^k \mapsto x^k + a^k.$$

Le neutre est  $a^k = 0$  et la fonction  $\Phi(a; b)$  est donnée par

$$\Phi^k(a; b) = a^k + b^k.$$

Un autre exemple est donné par le groupe des matrices  $2 \times 2$  de la forme

$$\begin{pmatrix} a^1 & a^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$a^1 > 0$ ,  $-\infty < a^2 < \infty$ . Le produit de deux telles matrices est

$$\begin{pmatrix} a^1 & a^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1 & b^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 b^1 & a^1 b^2 + a^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et donc les coordonnées du produit sont données par :

$$\begin{aligned} \Phi^1(a; b) &= a^1 b^1 \\ \Phi^2(a; b) &= a^1 b^2 + a^2 \end{aligned}$$

Le neutre a pour coordonnées  $a^1 = 1$ ,  $a^2 = 0$ . En translatant  $a^1$ ,  $a^1 = a^1 + 1$ , on peut supposer que le neutre a pour coordonnées  $a^i = 0$ .

Nous supposons par la suite que les coordonnées sur le groupe ont été choisies de manière telle que le neutre correspond à  $a^i = 0$ .

*Groupes de Lie matriciels compacts* Un groupe de Lie matriciel est compact si il décrit une surface bornée de  $\mathbb{R}^{n^2}$  ou  $\mathbb{R}^{2n^2}$ . Par exemple,  $U(n)$ ,  $SU(n)$ ,  $O(n)$  et  $SO(n)$  sont des groupes compacts. En effet, pour  $U(n)$  et  $SU(n)$  : la condition  $UU^\dagger = I$  implique  $\sum_i U_{ji}U_{mi}^* = \delta_{jm}$  et donc  $\sum_i |U_{ji}|^2 = 1$ , ce qui montre que les  $U_{ji}$  restent dans un ensemble borné. Il en est de même pour  $O(n)$  et  $SO(n)$ .

Contre-exemple : le groupe de Lorentz  $SO(3,1)$  est non-compact. Une transformation de Lorentz propre de rapidité  $\gamma$  contient des éléments de matrice de la forme  $\cosh \gamma$  et  $\sinh \gamma$  qui ne sont pas bornés.

### 5.2 Algèbres de Lie

*Définition* Une algèbre de Lie (réelle ou complexe) est un espace vectoriel  $L$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  muni d'une opération "crochet de Lie"  $[,] : L \times L \rightarrow L$  qui jouit des propriétés suivantes :

1.  $[ax + by, z] = a[x, z] + b[y, z]$  pour tous  $x, y, z \in L$  et  $a, b \in \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  ;
2.  $[x, y] = -[y, x]$  pour tous  $x, y \in L$  ; et
3.  $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$  pour tous  $x, y, z \in L$  ("identité de Jacobi").

Les algèbres de Lie considérées ici sont des algèbres de Lie de matrices, pour lesquelles le crochet de Lie est le commutateur,

$$[x, y] = xy - yx \tag{5.2}$$

Il est toujours possible de complexifier une algèbre de Lie réelle en une algèbre de Lie complexe en considérant des combinaisons linéaires à coefficients complexes des éléments de l'algèbre ; la structure de crochet s'étend par linéarité.

Nous ne considérons dans ce cours que les algèbres de dimension finie. Le théorème d'Ado (non-démontré ici) énonce que toute algèbre de Lie de dimension finie à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  est isomorphe à une algèbre de Lie matricielle.

*Constantes de structure* Soit  $\{X_a\}$  une base de  $L$ . On a

$$[X_a, X_b] = C_{ab}^c X_c. \tag{5.3}$$

Les nombres  $C_{ab}^c = -C_{ba}^c$  sont appelés "constantes de structure" et satisfont à

$$C_{ab}^e C_{ce}^d + C_{bc}^e C_{ae}^d + C_{ca}^e C_{be}^d = 0 \tag{5.4}$$

en vertu de l'identité de Jacobi.

On peut réécrire cette equation en utilisant la convention des indices antisymétrisés comme

$$C_{[ab}^e C_{c]e}^d = 0.$$

*Représentations* Une représentation de  $L$  est une application linéaire  $s$  de  $L$  dans  $gl(X)$  qui préserve le commutateur,

$$s(ax + by) = as(x) + bs(y) \quad \forall x, y \in L, \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \tag{5.5}$$

$$s([x, y]) = [s(x), s(y)] \quad \forall x, y \in L \tag{5.6}$$

1. Rappelons que  $gl(X)$  est l'ensemble des opérateurs linéaires  $X \rightarrow X$  ;  $X$  est ici un espace vectoriel que nous supposons toujours de dimension finie. On adopte la convention

$$O(X_b) = (O)_b^c X_c$$

pour tout  $O \in gl(X)$ .

Quelques exemples

$$\begin{aligned} \mathfrak{u}(n) &= \{x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid x + x^\dagger = 0\} \\ \mathfrak{su}(n) &= \{x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid x + x^\dagger = 0 \text{ et } \text{Tr}(x) = 0\} \\ \mathfrak{so}(n) &= \{x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid x + x^t = 0\} \\ \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) &= \{x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid \text{Tr}(x) = 0\} \\ \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) &= \{x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid \text{Tr}(x) = 0\} \end{aligned}$$

Les algèbres  $\mathfrak{so}(n)$  et  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$  sont réelles et l'algèbre  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  est complexe. Qu'en est-il de  $\mathfrak{u}(n)$  et  $\mathfrak{su}(n)$ ? Une combinaison complexe  $ax$ ,  $a \in \mathbb{C}$  d'une matrice unitaire  $x = -x^\dagger$  est elle-même unitaire seulement si  $a \in \mathbb{R}$ . Il s'agit donc d'algèbres de Lie réelles même si leur éléments de matrice sont complexes!

Algèbre de Lie définie par un groupe de Lie

Une première relation entre algèbres et groupes de Lie peut être dérivée de la manière suivante. Soit l'ensemble des courbes (différentiables)  $c(t)$  d'un groupe de Lie  $G$  qui passent par l'identité 1. On fixe la paramétrisation  $t \in \mathbb{R}$  des courbes telle que  $c(0) = 1$ . On définit  $\mathfrak{g}(G)$  comme l'espace tangent à l'identité :

$$\mathfrak{g}(G) = \{c'(0) \mid c : \mathbb{R} \rightarrow G \text{ courbe telle que } c(0) = 1\} \quad (5.7)$$

On notera  $\mathfrak{g}(G) = \mathfrak{g}$  par simplicité. Soit deux courbes  $c_1(k_1t)$  et  $c_2(k_2t)$  avec  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$  et  $c_1(0) = c_2(0) = 1$ . On a

$$\frac{d}{dt}[c_1(k_1t)c_2(k_2t)]|_{t=0} = k_1c_1'(0)c_2(0) + k_2c_1(0)c_2'(0) = k_1c_1'(0) + k_2c_2'(0).$$

Donc l'espace  $\mathfrak{g}$  est un espace vectoriel fermé sous addition et multiplication scalaire.

Le groupe  $G$  est fermé sous l'action adjointe  $h \rightarrow Ad_g(h) = ghg^{-1}$ . Donc pour tout  $g \in G$  et pour toute courbe  $c(t) \in G$  on a aussi  $gc(t)g^{-1} \in G$ . En supposant  $c(0) = 1$  et en différenciant en  $t = 0$  on obtient  $gc'(0)g^{-1} \in \mathfrak{g}$  puisque  $gc(0)g^{-1} = 1$ . Dénotons  $x = c'(0) \in \mathfrak{g}$ . On a donc montré que  $\mathfrak{g}$  est fermé sous l'action adjointe du groupe

$$Ad(g)x \equiv gxcg^{-1} \in \mathfrak{g}. \quad (5.8)$$

Prenons maintenant  $g = c(t) \in G$  une autre courbe passant par l'identité et calculons la transformation de  $x$  sous l'action adjointe du groupe, aussi proche de l'identité. On a  $c(t) = 1 + ty + O(t^2)$  avec  $y \in \mathfrak{g}$ . L'inverse de  $c(t)$  a la forme  $c(t)^{-1} = 1 - ty + O(t^2)$ . On a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( c(t)xc(t)^{-1} \right) \Big|_{t=0} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (c(t)xc(t)^{-1} - x) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((1 + ty)x(1 - ty) - x) \\ &= yx - xy = [y, x]. \end{aligned}$$

L'espace vectoriel  $\mathfrak{g}$  est donc une algèbre de Lie. On a donc démontré

Un exemple pour  $SO(3)$  est la courbe

$$c(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dont l'espace tangent à l'identité est

$$\text{décrit par } c'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Théorème 5.1.** *L'espace tangent de toutes les courbes autour de l'identité de tout groupe de Lie définit une algèbre de Lie.*

Par exemple, les groupes de Lie

$$\begin{aligned} U(n) &= \{X \in GL(n, \mathbb{C}) | XX^\dagger = 1\} \\ SU(n) &= \{X \in GL(n, \mathbb{C}) | XX^\dagger = 1 \text{ et } \text{Det}(X) = 1\} \\ SO(n) &= \{X \in GL(n, \mathbb{R}) | XX^t = 1 \text{ et } \text{Det}(X) = 1\} \\ SL(n, \mathbb{R}) &= \{X \in GL(n, \mathbb{R}) | \text{Det}(X) = 1\} \\ SL(n, \mathbb{C}) &= \{X \in GL(n, \mathbb{C}) | \text{Det}(X) = 1\} \end{aligned}$$

donne des algèbres  $\mathfrak{g}$  qui sont respectivement contenues dans les différentes algèbres de Lie données en exemple plus haut. On peut simplement poser  $X = 1 + tx + O(t^2) \in G$  et en déduire les propriétés de  $x \in \mathfrak{g}(G)$ . Ainsi on trouve

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}(U(n)) &\subseteq \mathfrak{u}(n), \\ \mathfrak{g}(SU(n)) &\subseteq \mathfrak{su}(n), \\ \mathfrak{g}(SO(n)) &\subseteq \mathfrak{so}(n), \\ \mathfrak{g}(SL(n, \mathbb{R})) &\subseteq \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}), \\ \mathfrak{g}(SL(n, \mathbb{C})) &\subseteq \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \end{aligned} \tag{5.9}$$

Une algèbre de Lie est dite compacte si elle est l'algèbre d'un groupe de Lie compact.

Pour prouver l'égalité il faut introduire la notation d'exponentiation vers laquelle nous nous tournons.

*Composante connexe d'un groupe de Lie matriciel à partir d'une algèbre de Lie*

Il est possible de retourner la logique et de partir d'une algèbre de Lie de matrices pour définir un groupe de Lie matriciel. On utilise pour cela l'exponentielle matricielle  $e^x = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} x^N$  d'une matrice  $x$  à coefficients réels ou complexes. Elle vérifie les propriétés suivantes (à prouver en exercice) :

- (i)  $e^x e^y = e^{x+y}$  si  $[x, y] = 0$ ;
- (ii)  $(e^x)^{-1} = e^{-x}$ ;
- (iii)  $t \rightarrow e^{tx}$  est une courbe différentiable de  $GL(n, \mathbb{R})$  dans le cas réel (et  $GL(n, \mathbb{C})$  dans le cas complexe) qui est l'identité à  $t = 0$ ;
- (vi)  $\frac{d}{dt}(e^{tx}) = x e^{tx}$ ;
- (v)  $\text{Det } e^x = e^{\text{Tr } x}$ ;
- (vi) la transformation  $x \rightarrow e^x$  est infiniment différentiable.

Il est alors possible de montrer que l'exponentiation d'une combinaison arbitraire d'éléments de l'algèbre de Lie génère un groupe de

Lie qui est connexe (car décrit par des courbes continues passant par l'identité). Par exemple, si  $x \in \mathfrak{u}(n)$ , on a

$$e^{tx}(e^{tx})^\dagger = e^{tx}e^{tx^\dagger} = e^{tx}e^{-tx} = 1 \tag{5.10}$$

et donc  $e^{tx} \in U(N)$ . Comme  $e^{tx} = 1 + tx + O(t^2)$ , on a aussi  $x \in \mathfrak{g}(U(N))$  donc on a prouvé  $\mathfrak{u}(n) \subseteq \mathfrak{g}(U(n))$ . Il en va de même pour les quatre autres exemples cités plus haut (exercice). En combinant avec (5.9) on obtient

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}(U(n)) &= \mathfrak{u}(n), \\ \mathfrak{g}(SU(n)) &= \mathfrak{su}(n), \\ \mathfrak{g}(SO(n)) &= \mathfrak{so}(n), \\ \mathfrak{g}(SL(n, \mathbb{R})) &= \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}), \\ \mathfrak{g}(SL(n, \mathbb{C})) &= \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \end{aligned} \tag{5.11}$$

En toute généralité, on peut prouver (non démontré ici) :

**Théorème 5.2.** *Soit  $G$  un groupe de Lie matriciel et  $\mathfrak{g}$  son algèbre alors  $\exp \mathfrak{g}$  génère la composante connexe de  $G$ .*

Rappelons comme vu en BAC3 que deux algèbres de Lie isomorphes ne donnent pas nécessairement des groupes de Lie isomorphes par exponentiation car l'application  $\exp$  n'est pas nécessairement injective et son noyau peut dépendre de la représentation.

Par exemple, on a l'isomorphisme entre algèbres  $\mathfrak{su}(2) \simeq \mathfrak{so}(3)$  mais pas entre groupes,  $SO(3) \simeq SU(2)/\mathbb{Z}_2$ , principalement car  $\exp(2\pi i \sigma_3) = I$  où  $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{su}(2)$ .

*Représentation adjointe* La représentation adjointe agit dans l'espace vectoriel  $L$  lui-même selon la loi

$$ad_y(x) = [y, x] \tag{5.12}$$

Les matrices de la représentation adjointe ont pour éléments de matrice les constantes de structure,

$$(ad_{X_a})^c_b = C^c_{ab} \tag{5.13}$$

La représentation adjointe  $ad$  de l'algèbre est la représentation associée à la représentation adjointe  $Ad$  du groupe de Lie correspondant,  $Ad_g(x) = g x g^{-1}$ ,  $ad_y(x) = \frac{d}{dt} (\exp(yt) x \exp(-yt))|_{t=0}$ .

*Idéal*

Soit  $K$  un sous-espace vectoriel de  $L$ . On dit que  $K$  est un idéal de  $L$  ssi  $[K, L] \subseteq K$ . Dans ce cas, l'espace vectoriel quotient  $L/K$  hérite d'une structure d'algèbre de Lie bien définie.

Les sous-espaces  $\{0\}$  et  $L$  sont des idéaux. On les appelle "idéaux triviaux". Une algèbre de Lie est **simple** ssi elle n'est pas abélienne

et ne possède pas d'idéal non trivial<sup>2</sup>. Une algèbre de Lie est **semi-simple** ssi elle n'est pas égale à  $u(1)$  et ne possède pas d'idéal abélien non trivial. Toute algèbre simple est semi-simple.<sup>3</sup>

**Théorème 5.3.** *La représentation adjointe d'une algèbre de Lie simple  $L$  est irréductible et fidèle.*

*Démonstration.* (i) La représentation adjointe est irréductible. En effet, soit  $M$  un sous-espace invariant. La condition d'invariance est équivalente pour la représentation adjointe à  $ad_y x \in M \quad \forall x \in M, \quad \forall y \in L$ , c'-à-d.,  $[y, x] \in M \quad \forall x \in M, \quad \forall y \in L$ , ce qui montre que  $M$  est un idéal, qui doit nécessairement être trivial car  $L$  est simple.

(ii) La représentation adjointe est fidèle. En effet, supposons  $ad_x = 0$  pour  $x \in L$ . Alors,  $[x, y] = 0 \quad \forall y \in L$ , ce qui montre que  $\mathbb{R}x$  est un idéal abélien. On en déduit que  $x = 0$  ou  $\mathbb{R}x = L$ , mais ce second cas n'est pas possible car  $L$  est simple.  $\square$

A noter qu'inversément, si la représentation adjointe d'une algèbre de Lie est irréductible, il n'y a pas d'idéal non trivial (car ceux-ci définissent des sous-espaces invariants). L'algèbre est donc simple si elle est de dimension  $> 1$  (en dimension 1, la seule algèbre de Lie est l'algèbre abélienne  $u(1)$ ).

### Forme bilinéaire symétrique invariante

On appelle forme bilinéaire symétrique invariante sur  $L$  toute forme bilinéaire symétrique  $\beta : L \times L \rightarrow \mathbb{C}$  qui est invariante sous l'action adjointe du groupe

$$\beta(Ad_g(x), Ad_g(z)) = \beta(x, z). \quad (5.14)$$

Cette propriété implique

$$\beta([x, y], z) = \beta(x, [y, z]). \quad (5.15)$$

pour  $x, y, z \in L$  puisque pour  $g = 1 + ty + O(t^2) \in G$  on a

$$0 = \beta(Ad_g(x), Ad_g(z)) - \beta(x, z) = t(\beta([y, x], z) + \beta(x, [y, z])) + O(t^2).$$

Un exemple est donné par la forme de Killing (exercice : prouver qu'elle est invariante),

$$k(x, y) = tr(ad_x ad_y) = tr(ad_y ad_x). \quad (5.16)$$

De manière générale, si  $s$  est une représentation de  $L$ , la forme bilinéaire symétrique

$$\beta_s(x, y) = tr(s(x)s(y)) \quad (5.17)$$

2. L'algèbre abélienne à une dimension  $u(1)$  n'est donc pas une algèbre de Lie simple.
3. L'opposé n'est pas vrai. Par exemple, l'algèbre  $su(3) \oplus su(2)$  n'est pas simple mais elle est semi-simple.

Une représentation est irréductible si elle n'admet pas un sous-espace invariant non-trivial (càd l'ensemble vide ou tout l'espace).

Pour une algèbre de Lie réelle quelconque et une représentation quelconque, la forme bilinéaire symétrique  $\beta_s$  n'est pas nécessairement réelle. Par exemple, la représentation à une dimension  $s : \lambda x \rightarrow \lambda(1+i)x$  (opérateur de multiplication par  $\lambda(1+i)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ) de l'algèbre abélienne réelle à une dimension  $\mathbb{R}$  conduit à  $\beta_s(x, x) = tr(s(x)s(x)) = 2i\lambda^2$ . La forme de Killing (zero ici) est cependant toujours réelle.



est invariante car

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(s[x, y]s(z)) &= \operatorname{tr}([s(x), s(y)]s(z)) = \operatorname{tr}((s(x)s(y) - s(y)s(x))s(z)) \\ &= \operatorname{tr}(s(x)[s(y), s(z)]) = \operatorname{tr}(s(x)s([y, z])) \end{aligned}$$

en vertu de la propriété cyclique de la trace. En particulier, si  $L$  est une algèbre de Lie de matrices (ce que nous supposons toujours), la forme bilinéaire symétrique

$$\alpha(x, y) = \operatorname{tr}(xy) \quad (5.18)$$

existe et est invariante.

On appelle radical  $R_\beta$  de la forme bilinéaire symétrique invariante  $\beta$  l'ensemble des éléments  $x$  de  $L$  tels que  $\beta(x, y) = 0 \quad \forall y \in L$ . La forme bilinéaire symétrique invariante  $\beta$  est non-dégénérée si et seulement si  $R_\beta = 0$ . Le radical  $R_\beta$  est un idéal car si  $x \in R_\beta, y, z \in L$ , on a  $\beta([x, y], z) = \beta(x, [y, z]) = 0$  et donc  $[x, y] \in R_\beta$ .

La forme de Killing d'une algèbre simple est donc non-dégénérée.

On peut montrer (non démontré ici) qu'une algèbre est semi-simple ssi sa forme de Killing est non-dégénérée.



## 6

# *Unitarité des représentations des groupes compacts*

L'objectif principal de ce chapitre est de prouver que toute représentation d'un groupe de Lie compact et d'un groupe fini est équivalente à une représentation unitaire.

Dans une première partie, on dérivera les concepts de translations à gauche et à droite d'un groupe quelconque. Cela permettra en passant de prouver un joli théorème dû à Cayley sur les groupes finis. On utilisera ces concepts pour introduire deux mesures dites de Haar sur les groupes : l'intégrale invariante à gauche et l'intégrale invariante à droite. Le concept de groupe unimodulaire pour lequel ces mesures sont égales sera introduit. En particulier les groupes de Lie compacts et les groupes finis sont unimodulaires. On pourra alors prouver que toute représentation d'un groupe de Lie compact ou d'un groupe fini est équivalente à une représentation unitaire.

Vu le théorème vu en BAC<sub>3</sub> qui stipule que toute représentation unitaire est complètement réductible, on prouvera que toute représentation d'un groupe de Lie compact ou d'un groupe fini est complètement réductible. Le fait les représentations d'algèbres de Lie compactes (et en particulier la représentation adjointe) peuvent être choisies unitaires sera crucial dans la classification des algèbres de Lie compactes décrite au prochain chapitre.

### *6.1 Translations sur un groupe*

Pour la suite, il est important de définir les translations sur un groupe  $G$  que nous pouvons prendre quelconque (fini, de Lie, etc). Nous en profiterons pour donner un théorème utile sur les groupes finis avant de se concentrer à la section suivante sur les groupes matriciels compacts.

*Translations à gauche*

Le groupe  $G$  agit naturellement sur lui-même. A chaque élément  $h \in G$ , on peut associer la transformation inversible

$$L_h : G \rightarrow G \quad g \mapsto L_h(g) = hg$$

appelée translation à gauche par  $h$ . De  $L_{h_1 h_2}(g) = h_1 h_2 g = L_{h_1}(L_{h_2}(g))$ ,  $L_e =$  transformation identique et  $(L_h)^{-1} = L_{h^{-1}}$ , on déduit que l'ensemble  $\{L_h\}$  est un groupe et que l'application  $h \rightarrow L_h$  est un homomorphisme. Cet homomorphisme est évidemment surjectif et injectif (si  $L_h =$  transformation identique, alors  $hg = g \forall g$  c-à-d  $h = e$ ). Par conséquent, la correspondance  $h \rightarrow L_h$  est un isomorphisme. On a démontré :

**Théorème 6.1.** *Tout groupe  $G$  est isomorphe au groupe des translations à gauche sur  $G$ .*

L'espace  $G$  est évidemment homogène pour les translations à gauche et le groupe  $G$  agit sur lui-même de manière simplement transitive :

$$\forall g_1, g_2 \in G \quad \exists h \in G : L_h g_1 = g_2 \quad (\text{transitivité})$$

( $h$  est donné par  $g_2 g_1^{-1}$ ) et

$$L_h g = g \Rightarrow hg = g \Rightarrow h = e$$

ce qui montre que le groupe de stabilité de n'importe quel point =  $\{e\}$ .

*Translations à droite*

On définit également les translations à droite de  $G$  par la formule :

$$R_h(g) = gh.$$

On a  $R_{h_1 h_2}(g) = g(h_1 h_2) = (gh_1)h_2 = R_{h_2}(R_{h_1}(g))$  et donc  $R_{h_1 h_2} = R_{h_2} R_{h_1}$ . Soit

$$\bar{R}_h \equiv R_{h^{-1}}.$$

On a  $\bar{R}_{h_1 h_2} = R_{(h_1 h_2)^{-1}} = R_{(h_2)^{-1} (h_1)^{-1}} = R_{(h_1)^{-1}} R_{(h_2)^{-1}} = \bar{R}_{h_1} \bar{R}_{h_2}$  et par conséquent, l'application  $h \mapsto \bar{R}_h$  définit un homomorphisme de  $G$  dans le groupe des translations à droite "barres", qui est en fait un isomorphisme.

Il en résulte que  $G$  agit aussi à droite sur lui-même. Comme les translations à gauche commutent avec les translations à droite,

$$L_{h_1} R_{h_2} = R_{h_2} L_{h_1}$$

(car  $L_{h_1}(R_{h_2}(g)) = L_{h_1}(gh_2) = h_1(gh_2) = (h_1g)h_2 = R_{h_2}(h_1g) = R_{h_2}(L_{h_1}(g))$ ), on a en fait une action de  $G \times G$  sur  $G$ . Le sous-groupe de stabilité de l'identité est donné par le "sous-groupe diagonal"  $\{(g, g)\}$  de  $G \times G$ . En effet

$$(g_1, g_2)e = e \Leftrightarrow g_1 e g_2^{-1} = e \Leftrightarrow g_1 = g_2.$$

Le sous-groupe diagonal est isomorphe à  $G$ .

Une application directe des considérations précédentes conduit au théorème de Cayley.

**Théorème 6.2** (Théorème de Cayley). *Tout groupe fini  $G$  d'ordre  $n$  est isomorphe à un sous-groupe du groupe symétrique  $S_n$ .*

Rappel : le groupe symétrique  $S_n$  est le groupe des permutations de l'ensemble d'ordre  $n$ . Il a  $n!$  éléments.

En effet,  $G$  est isomorphe au groupe des translations à gauche de  $G$  par  $G$ . Or, toute translation à gauche est une permutation des  $n$  éléments de  $G$ , donc  $G$  est isomorphe à un sous-groupe de  $S_n$ .

Le groupe symétrique  $S_n$  joue donc un rôle tout particulier dans l'étude des groupes finis. On voit également que le nombre de groupes finis d'ordre  $n$  distincts (à un isomorphisme près) est fini puisque le nombre de sous-ensembles à  $n$  éléments de l'ensemble fini  $S_n$  est fini. Nous allons prouver dans ce chapitre l'analogie du théorème de Cayley pour les groupes compacts : ils sont tous isomorphes à des sous-groupes de  $U(n)$ !

## 6.2 Intégration invariante sur un groupe de Lie matriciel

### Intégrale invariante à gauche

Pour intégrer sur le groupe, il faut se donner une "fonction de densité"  $\rho(a)$  sur le domaine de variation des coordonnées  $a \in D$ . L'intégrale d'une fonction  $f$  définie sur le groupe prend alors la forme

$$\int_D f(a) \rho(a) da$$

où  $da \equiv da^1 da^2 \cdots da^n$ . Pour utiliser des notations plus compactes, et pour insister sur le fait qu'on intègre sur le groupe, on note aussi cette intégrale sous la forme

$$\int_G d\tau f(g)$$

( $d\tau \equiv \rho(a)da$  en termes de coordonnées).

L'intégrale invariante à gauche est définie par la condition

$$\int_G d_L \tau f(hg) = \int_G d_L \tau f(g)$$

On utilisera les conventions anglaises  $L$  (left),  $R$  (right) pour éviter l'ambiguïté  $G$  (groupe) ou (gauche).

Pour information, il s'agit d'un cas particulier de mesure de Haar.

pour tout élément  $h$  du groupe et toute fonction  $f$  sur le groupe (l'intégrale de la translatée par  $h$  de la fonction  $f$  coïncide avec l'intégrale de la fonction  $f$ ). En terme de coordonnées,

$$\int_D f(\Phi(\bar{b}; a)) \rho_L(a) da = \int_D f(a) \rho_L(a) da$$

où  $\bar{b}^k$  sont les coordonnées de  $h$ .

**Théorème 6.3.** *L'intégrale invariante à gauche existe et est unique à un facteur multiplicatif près.*

*Démonstration.* Soit  $b^k$  les coordonnées de  $h^{-1}$ . Soit  $a'^k = \Phi^k(\bar{b}; a)$ .

On a  $a^k = \Phi^k(b; a')$ . Effectuons le changement de coordonnées  $a^k \rightarrow a'^k$ . Comme  $a'^k$  parcourt également le domaine  $D$ , la condition d'invariance à gauche de la mesure devient

$$\int_D f(a') \rho_L(\Phi(b; a')) J(b; a') da' = \int_D f(a) \rho_L(a) da$$

où  $J(b; a')$  est défini par

$$J(b; a') = |\text{Det } M(b; a')|.$$

Ici,  $M(b; a')$  est la matrice jacobienne du changement de variables  $a^k \rightarrow a'^k$ ,

$$M_m^k(b, a') = \left. \frac{\partial \Phi^k(b; c)}{\partial c^m} \right|_{c=a'}.$$

Remplaçons les variables d'intégration  $a'^k$  par  $a^k$  (changement de notations) dans la condition d'invariance. On obtient

$$\int_D f(a) \rho_L(\Phi(b; a)) J(b; a) da = \int_D f(a) \rho_L(a) da.$$

Cette égalité doit avoir lieu pour toute fonction  $f$  sur le groupe. Par conséquent, la fonction de densité (mesure)  $\rho(a)$  doit satisfaire à la condition

$$\rho_L(a) = \rho_L(\Phi(b; a)) J(b; a)$$

pour tout choix de  $b^k$  (c'-à-d. de  $h$ ).

Cette condition doit être en particulier satisfaite lorsqu'on prend pour  $a^k$  les coordonnées du neutre, que nous supposons correspondre à  $a^k = 0$ . Ceci conduit à

$$\rho_L(0) = \rho_L(b) J(b)$$

où on a posé

$$J(b) = J(b; 0).$$

Cette équation détermine complètement la fonction de densité  $\rho(b)$  à un facteur multiplicatif près (si elle existe),

$$\rho_L(a) = \frac{\rho_L(0)}{J(a)}$$

Pour achever la démonstration du théorème, il faut vérifier que la fonction de densité donnée par cette expression obéit bien à la condition d'être invariante à gauche,  $\rho_L(a) = \rho_L(\Phi(b;a)) J(b;a)$ , ou encore en utilisant l'expression de  $\rho(a)$ ,

$$J(\Phi(b;a)) = J(a)J(b;a).$$

Pour démontrer que cette expression est correcte, on observe que

$$\begin{aligned} M_m^k(\Phi(b;a);0) &= \left. \frac{\partial \Phi^k(\Phi(b;a);c)}{\partial c^m} \right|_{c=0} \\ &= \left. \frac{\partial \Phi^k(b;\Phi(a;c))}{\partial c^m} \right|_{c=0} \quad (\text{associativité}) \\ &= \left. \frac{\partial \Phi^k(b;z)}{\partial z^l} \right|_{z=a} \left. \frac{\partial z^l}{\partial c^m} \right|_{c=0} \end{aligned}$$

où  $z^m = \Phi^m(a;c)$  (ce qui implique  $z^m = a^m$  pour  $c = 0$ ). Cette dernière équation est équivalente à

$$M_m^k(\Phi(b;a);0) = M_l^k(b;a) M_m^l(a;0)$$

d'où l'on tire la relation cherchée en prenant la valeur absolue du déterminant.  $\square$

### Intégrale invariante à droite

L'intégrale invariante à droite est définie par la même condition, mais où on translate cette fois-ci l'argument de la fonction intégrée à droite,

$$\int_G d_R \tau f(gh) = \int_G d_R \tau f(g)$$

pour tout élément  $h$  du groupe et toute fonction  $f$  sur le groupe. En terme de coordonnées,

$$\int_D f(\Phi(a;\bar{b})) \rho_R(a) da = \int_D f(a) \rho_R(a) da$$

où  $\bar{b}^k$  sont les coordonnées de  $h$  et où  $\rho_R(a)$  est la fonction de densité associée à la mesure invariante à droite  $d\tau_R$ .

**Théorème 6.4.** *L'intégrale invariante à droite existe et est unique à un facteur multiplicatif près.*

*Démonstration.* La démonstration procède exactement comme ci-dessus. On obtient pour expression explicite de la mesure invariante à droite

$$\rho_R(a) = \frac{\rho_R(0)}{\tilde{J}(a)}$$

avec

$$\tilde{J}(b) = |\text{Det } \tilde{M}_m^k(0; b)|, \quad \tilde{M}_m^k(a; b) = \left. \frac{\partial \Phi^k(c; b)}{\partial c^m} \right|_{c=a}.$$

□

### Exemples

*Groupe des translations* On a  $J(a) = \tilde{J}(a) = 1$  et donc les mesures invariantes à gauche et à droite coïncident. L'intégrale invariante sur le groupe est donnée par

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(a) da$$

$$(\rho_L(a) = \rho_R(a) = 1).$$

*Groupe à deux paramètres étudié ci-dessus* On a

$$\begin{aligned} \Phi^1(a; b) &= a^1 b^1 \\ \Phi^2(a; b) &= a^1 b^2 + a^2 \end{aligned}$$

et les coordonnées de l'identité sont  $a^1 = 1, a^2 = 0$ .

La matrice jacobienne  $M_m^k(b; a)$  est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi^1(b; a)}{\partial b^1} &= a^1, & \frac{\partial \Phi^1(b; a)}{\partial b^2} &= 0 \\ \frac{\partial \Phi^2(b; a)}{\partial b^1} &= 0, & \frac{\partial \Phi^2(b; a)}{\partial b^2} &= a^1 \end{aligned}$$

De là, il vient  $J(a) = (a^1)^2$  et donc

$$\rho_L(a) = \frac{\text{constante}}{(a^1)^2}.$$

L'intégrale invariante à gauche est donnée par

$$\int_0^\infty \frac{da^1}{(a^1)^2} \int_{-\infty}^\infty da^2 f(a^1, a^2).$$

De même, la matrice jacobienne  $\tilde{M}_m^k(b; a)$  est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi^1(a; b)}{\partial a^1} &= b^1, & \frac{\partial \Phi^1(a; b)}{\partial a^2} &= 0 \\ \frac{\partial \Phi^2(a; b)}{\partial a^1} &= b^2, & \frac{\partial \Phi^2(a; b)}{\partial a^2} &= 1 \end{aligned}$$



De là, il vient  $\tilde{f}(b) = b^1$  et donc

$$\rho_R(b) = \frac{\text{constante}}{b^1}.$$

L'intégrale invariante à droite est donnée par

$$\int_0^\infty \frac{db^1}{b^1} \int_{-\infty}^\infty db^2 f(b^1, b^2).$$

Les mesures invariantes à gauche et invariantes à droite sont clairement distinctes dans ce cas.

### Groupes unimodulaires

On dit qu'un groupe est unimodulaire si toute mesure invariante à gauche est invariante à droite. On parle alors de "mesure invariante" (sans préciser).

Une classe importante de groupes unimodulaires est fournie par les groupes compacts comme nous allons le démontrer :

**Théorème 6.5.** *Les groupes compacts sont unimodulaires.*

*Démonstration.* Soit  $\sigma \in G$  un élément quelconque du groupe. On définit une mesure  $dv$  sur  $G$  par la formule

$$\int_G f(g) dv = \int f(\sigma g \sigma^{-1}) d_L \tau.$$

La fonction de densité  $\psi(a)$  associée à  $dv$  se tire de la définition

$$\int_D f(a) \psi(a) da = \int_D f(\Phi(b; \Phi(a; \bar{b}))) \rho_L(a) da$$

par le changement de variables  $a^k \rightarrow \Phi^k(b; \Phi(a; \bar{b}))$ . Ici, les  $b^k$  sont les coordonnées de  $\sigma$  et  $\bar{b}^k$  celles de  $\sigma^{-1}$ .

On a :

$$\begin{aligned} \int_G f(hg) dv &= \int_G f(\sigma h g \sigma^{-1}) d_L \tau \\ &= \int_G f(\sigma h \sigma^{-1} \sigma g \sigma^{-1}) d_L \tau \\ &= \int_G f(\sigma g \sigma^{-1}) d_L \tau \quad (\text{car } d_L \tau \text{ est invariante à gauche}) \\ &= \int_G f(g) dv \end{aligned}$$

Donc la mesure  $dv$  est invariante à gauche et diffère par conséquent de  $d_L \tau$  par une constante qui peut dépendre de  $\sigma$ ,

$$dv = c(\sigma) d_L \tau \quad \Leftrightarrow \quad \int_G f(\sigma g \sigma^{-1}) d_L \tau = c(\sigma) \int_G f(g) d_L \tau.$$

Comme le groupe est compact, la fonction  $f = 1$  (fonction égale à 1 en tout point du groupe) est intégrable. Pour  $f = 1$ , on a  $f(g) = 1 = f(\sigma g \sigma^{-1})$ . Donc la constante  $c(\sigma)$  est égale à 1. Il vient donc

$$\int_G f(\sigma g \sigma^{-1}) d_L \tau = \int_G f(g) d_L \tau.$$

Comme  $d_L \tau$  est invariante à gauche, cette formule conduit à

$$\int_G f(g \sigma^{-1}) d_L \tau = \int_G f(g) d_L \tau, \quad \forall \sigma,$$

ce qui montre que  $d_L \tau$  est aussi invariante à droite et coïncide avec  $d_R \tau$ . □

Pour les groupes compacts, il est naturel de normaliser les intégrales invariantes à 1,

$$\int_G d_L \tau = \int_D \rho_L(a) da = 1, \quad \int_G d_R \tau = \int_D \rho_R(a) da = 1$$

C'est ce que nous ferons systématiquement.

D'autres exemples de groupes unimodulaires sont les groupes finis et les groupes de Lie connexes semi-simples qui s'obtiennent par exponentiation d'une algèbre de Lie semi-simple.

### 6.3 Unitarité des représentations des groupes de Lie compacts et des groupes finis

Dans cette section,  $G$  est un groupe de Lie compact ou un groupe fini d'ordre  $n$  ( $|G| = n$ ). Comme dans le cours de BAC3, on ne considère que des représentations de dimension finie.

**Théorème 6.6.** *Toute représentation d'un groupe compact ou d'un groupe fini est équivalente à une représentation unitaire.*

*Démonstration.* Soit  $X$  l'espace de la représentation et  $(, )$  le produit hermitien sur  $X$ . Soient  $T(g)$  les opérateurs de la représentation. On n'a pas a priori  $(T(g)x, T(g)y) = (x, y)$ , mais on va montrer qu'il existe  $S$  tel que  $(T'(g)x, T'(g)y) = (x, y)$  où  $T'(g) = ST(g)S^{-1}$ . A cette fin, on introduit le produit hermitien auxiliaire

$$(x, y)_1 = \int_G d\tau (T(g)x, T(g)y).$$

pour les groupes compacts<sup>1</sup> et

$$(x, y)_1 = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} (T(g)x, T(g)y)$$

pour les groupes finis.<sup>2</sup>

On a

La mesure d'un groupe fini  $G$  est  $\frac{1}{n} \sum_{g \in G} f(g)$  et est invariante à gauche et à droite. En effet, la translation à gauche ou à droite par un élément  $h \in G$  est un homomorphisme et donc en particulier une bijection et donc  $\sum_{g \in G} f(hg) = \sum_{g' \in G} f(g') = \sum_{g'' \in G} f(g''h)$

1.  $(x, y)_1$  est bien défini comme intégrale sur un compact d'une fonction continue.

2. La somme est bien définie puisqu'elle est finie.

1.  $(x, y)_1 = ((y, x)_1)^*$
2.  $(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)_1 = \alpha_1 (x, y_1)_1 + \alpha_2 (x, y_2)_1$
3.  $(x, x)_1 \geq 0$

avec  $(x, x)_1 = 0$  ssi chacun des termes non négatifs  $(T(g)x, T(g)x)$  est nul et donc en particulier  $(T(e)x, T(e)x) = (x, x) = 0$  ce qui implique  $x = 0$ . Le produit  $(, )_1$  est donc bien hermitien.

Les opérateurs  $T(g)$  sont unitaires pour le produit scalaire auxiliaire  $(, )_1$ . En effet, (cas des groupes finis, on remplace la somme par une intégrale pour les groupes compacts)

$$\begin{aligned} (T(g)x, T(g)y)_1 &= \frac{1}{n} \sum_{g' \in G} (T(g')T(g)x, T(g')T(g)y) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{g' \in G} (T(g'g)x, T(g'g)y) \end{aligned}$$

Mais lorsque  $g'$  parcourt le groupe une et une seule fois, le produit  $g'g$  parcourt aussi le groupe une et une seule fois. Donc

$$\begin{aligned} (T(g)x, T(g)y)_1 &= \frac{1}{n} \sum_{h \in G} (T(h)x, T(h)y) \\ &= (x, y)_1 \end{aligned}$$

La représentation  $T$  est donc bien unitaire pour le produit scalaire hermitien auxiliaire.

Soit  $\{\bar{e}_k\}$  une base orthonormée pour le produit scalaire hermitien auxiliaire et  $\{e_k\}$  une base orthonormée pour le produit de départ. On a  $e_k = S\bar{e}_k$  pour un certain opérateur inversible  $S$  (opérateur de changement de base). Comme  $(\bar{e}_k, \bar{e}_l)_1 = \delta_{kl} = (e_k, e_l) = (S\bar{e}_k, S\bar{e}_l)$  pour tous  $k, l$ , on a aussi

$$(x, y)_1 = (Sx, Sy), \quad (x, y) = (S^{-1}x, S^{-1}y)_1$$

pour tous vecteurs  $x, y \in X$ .

Soit  $T'(g) = ST(g)S^{-1}$ . Démontrons que les opérateurs  $T'(g)$  sont unitaires pour le produit scalaire hermitien de départ. On a :

$$\begin{aligned} (T'(g)x, T'(g)y) &= (ST(g)S^{-1}x, ST(g)S^{-1}y) \\ &= (T(g)S^{-1}x, T(g)S^{-1}y)_1 \\ &= (S^{-1}x, S^{-1}y)_1 \\ &= (x, y) \end{aligned}$$

ce qui démontre l'assertion. □

**Corollaire 6.6.1.** *Comme toute représentation unitaire est complètement réductible comme prouvé en BAC3, toute représentation d'un groupe de Lie compact ou d'un groupe fini se décompose comme une somme directe*

$$T = m_1 T_1 \oplus m_2 T_2 \oplus \cdots \oplus m_k T_k$$

*de représentations irréductibles. Pour décrire la représentation la plus générale, il faut connaître toutes les représentations irréductibles.*

**Corollaire 6.6.2.** *Comme toute représentation fidèle et irréductible d'un groupe peut être utilisée comme définition du groupe lui-même et que tout groupe de Lie de dimension finie à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  est un groupe de Lie matriciel (théorème d'Ado), tout groupe de Lie compact est isomorphe à un groupe de matrices unitaires et est donc un sous-groupe de  $U(n)$ .*

## 7

# Classification et représentations des algèbres de Lie compactes

### 7.1 Algèbres de Lie compactes

Si un groupe de Lie est compact, on peut supposer que ses représentations sont unitaires, comme démontré au chapitre précédent. Tout groupe de Lie compact peut donc être écrit comme un groupe de matrices qui sont unitaires. Les matrices de l'algèbre de Lie correspondante sont alors antihermitiennes. Dans ce cas, la forme bilinéaire invariante  $\alpha(x, y) = \text{tr}(xy)$  est clairement définie négative car  $\text{tr}(xx) = -\text{tr}(x^\dagger x) = -\sum_{ij} |x_{ij}|^2 \leq 0$  avec  $\text{tr}(xx) = 0$  ssi  $x = 0$ . De manière générale, la forme bilinéaire symétrique invariante associée à une représentation unitaire (par des matrices antihermitiennes) est réelle et définie semi-négative car

$$\begin{aligned}(\beta_s(x, y))^* &= \text{tr}(s(x)^* s(y)^*) = \text{tr}(s(y)^\dagger s(x)^\dagger) = \text{tr}(s(x)s(y)) = \beta_s(x, y) \\ \beta_s(x, x) &= \text{tr}(s(x)s(x)) = -\text{tr}(s(x)^\dagger s(x)) \leq 0\end{aligned}$$

avec égalité ssi  $s(x) = 0$ , ce qui implique  $x = 0$  si  $s$  est fidèle. En particulier, pour une algèbre simple, la forme de Killing est définie négative.

Vu les résultats précédents, une algèbre de Lie est compacte ssi c'est une sous-algèbre de  $u(n)$ . Vu que toute représentation de  $u(n)$  est complètement réductible et en particulier la représentation adjointe qui est isomorphe à l'algèbre, il suit que toute algèbre de Lie compacte est isomorphe à la somme directe d'algèbres de Lie simples compactes et d'un certain nombre d'algèbres  $u(1)$ . D'où l'intérêt de classer les algèbres de Lie simples compactes.

Dans la suite du cours, on ne considèrera pour la simplicité que les algèbres de Lie simple compactes. De même, on ne considèrera que des représentations unitaires de l'algèbre (par des matrices antihermitiennes).

La théorie des algèbres de Lie a été développée avec succès dans un cadre beaucoup plus général ... mais c'est une étude qui va au-delà des ambitions du cours. Pour les intéressés, voir le cours MATH-F417 adressé aux mathématiciens.

On a :

**Théorème 7.1.** *La forme bilinéaire symétrique invariante d'une algèbre de Lie simple compacte est unique à un facteur multiplicatif près.*

**Démonstration :** Soit  $\beta$  une forme bilinéaire symétrique invariante de l'algèbre de Lie simple compacte  $L$ ,  $k$  sa forme de Killing. On peut choisir une base de l'algèbre de Lie en tant qu'espace vectoriel orthonormée par rapport à la forme de Killing (toute métrique euclidienne peut être diagonalisée). Donc on suppose sans nuire à la généralité que  $k = -I$ . La forme bilinéaire symétrique  $u = \beta + \lambda k = \beta - \lambda I$  est invariante pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Prenons  $\lambda (\in \mathbb{R})$  valeur propre de  $\beta$ ,  $\text{Det}(\beta - \lambda I) = 0$ . Alors, la forme bilinéaire invariante  $u$  est dégénérée et donc son radical est nécessairement tout  $L$ ,  $u = 0$ . Ceci implique  $\beta = \lambda k$ .  $\square$

On rappelle la définition  $k(x, y) = \text{tr}(ad_x ad_y)$ .

### Conventions des physiciens

En physique, il est de tradition de redéfinir les éléments des algèbres de Lie compactes en les multipliant par  $i$ , ce qui donne des matrices hermitiennes, dont les valeurs propres sont réelles. Ce sont ces générateurs redéfinis qui sont observables. On a ainsi  $x^\dagger = x$  et

$$[X_a, X_b] = iC_{ab}^c X_c \quad (7.1)$$

(après redéfinition) et la forme bilinéaire invariante  $\text{tr}(xy)$  est définie positive dans l'espace des combinaisons linéaires à coefficients réels des  $X_a$ , où elle définit donc un produit scalaire (de signature euclidienne).

Il est commode de normaliser le produit scalaire de manière à ce que les matrices simples aient des produits scalaires simples. Par exemple, pour  $so(3)$ , les générateurs standards  $X_i = iO_i$ ,

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont tels que  $\text{tr}X_i X_j = 2\delta_{ij}$ . On peut absorber le facteur 2 dans une normalisation du produit scalaire si on le souhaite.

De manière générale, on définit  $(x, y) = (\lambda)^{-1} \text{tr}(xy)$  où  $\lambda$  est un nombre réel positif dont la valeur est choisie selon la commodité. On étend ce produit scalaire en un produit scalaire hermitien par la formule

$$(x, y) = \frac{1}{\lambda} \text{tr}(x^\dagger y) \quad (7.2)$$

pour des combinaisons linéaires à coefficients complexes des  $X_a$ . On peut choisir la base de telle sorte que

$$\text{tr}(X_a X_b) = \lambda \delta_{ab} \quad (7.3)$$

Soit  $X_a = iX_a^m$  les générateurs des physiciens et  $X_a^m$  ceux des mathématiciens. On a

$$\begin{aligned} [X_a, X_b] &= -[X_a^m, X_b^m] \\ &= -C_{ab}^c X_c^m \\ &= iC_{ab}^c X_c. \end{aligned}$$

(i.e.,  $(X_a, X_b) = \delta_{ab}$ ). On vérifie aisément que  $ad_x$  est un opérateur hermitien pour  $x$  hermitien ( $(ad_x)^\dagger = ad_x$  si  $x = x^\dagger$ ). En effet,  $\lambda(ad_x y, z) = tr([x, y]^\dagger z) = tr([y^\dagger, x]z) = tr(y^\dagger[x, z]) = \lambda(y, ad_x z)$ . La représentation adjointe est bien unitaire.

Il résulte du théorème précédent qu'avec le choix (7.3), la forme de Killing des algèbres simples compactes est donnée par

$$k_{ab} = tr(ad_{X_a} ad_{X_b}) = \rho \delta_{ab} \quad (7.4)$$

où  $\rho$  est un nombre strictement positif.

*Nous utiliserons par la suite uniquement la convention des physiciens.*

## 7.2 Sous-algèbres de Cartan – Poids d'une représentation

La classification des algèbres de Lie simples compactes ainsi que l'étude de leurs représentations se font en diagonalisant simultanément un nombre maximum d'éléments de l'algèbre qui commutent.

On appelle **sous-algèbre de Cartan**  $H$  une sous-algèbre abélienne maximale de  $L$  (c'-à-d., non contenue dans une sous-algèbre abélienne plus grande). Soit  $\{h_i\}, i = 1, \dots, r$ , une base de  $H$ . On a

$$h_i = h_i^\dagger, \quad [h_i, h_j] = 0 \quad (7.5)$$

Il est commode de choisir une base orthonormée

$$(h_i, h_j) = \frac{1}{\lambda} tr(h_i h_j) = \delta_{ij}. \quad (7.6)$$

La dimension des sous-algèbres de Cartan notée  $r$  est appelée le **rang** de l'algèbre  $L$ .

Soit  $s$  une représentation irréductible de l'algèbre de Lie simple compacte  $L$ . Les "générateurs de Cartan"  $h_i$  sont diagonalisables puisqu'hermitiens ; leurs valeurs propres sont réelles. Dans toute représentation  $s$ , les opérateurs  $s(h_i)$  – que l'on continue à noter  $h_i$  en laissant tomber le "s" – sont aussi hermitiens et donc diagonalisables. De plus, ils commutent et sont donc diagonalisables simultanément. L'espace de la représentation se décompose en somme directe de sous-espaces propres. Soit  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_r)$  un des ensembles de valeurs propres apparaissant dans la représentation  $s$  et  $f_{\mu, A}$  les vecteurs propres correspondants,

$$h_i(f_{\mu, A}) = \mu_i f_{\mu, A} \quad (7.7)$$

(l'indice supplémentaire  $A$  est nécessaire si  $\mu$  est dégénérée). Si  $h = \sum_{i=1}^r a_i h_i$  est un élément de la sous-algèbre de Cartan,  $f_{\mu, A}$  est vecteur propre de  $h$  pour la valeur propre  $\mu(h) = \sum_i a_i \mu_i$ ,

$$\boxed{h(f_{\mu, A}) = \mu(h) f_{\mu, A}, \quad h \in H.} \quad (7.8)$$

Pour une base quelconque,  $g_{ij} \equiv (h_i, h_j)$  est appelée la forme de Cartan-Killing. C'est une métrique Euclidienne de dimension  $r$ .

Les sous-algèbres de Cartan sont uniques à un isomorphisme près (non-démontré).

Quand un système physique est invariant sous un groupe  $G$ , ses observables forment une représentation du groupe. Les opérateurs  $e^{h_i}, i = 1, \dots, r$  dans la représentation du groupe forment un ensemble complet d'opérateurs qui commutent (ECOC).

Il est donc commode de voir  $\mu$  comme un élément du dual  $H^*$  de la sous-algèbre de Cartan  $H$ . On appelle **poids** de la représentation  $s$  tout élément  $\mu$  du dual  $H^*$  de  $H$ ,  $\mu \in H^*$ , tel qu'il existe (au moins) un vecteur non-nul de la représentation  $s$  pour lequel on a (7.8). Les poids sont réels car ils sont des valeurs propres de matrices hermiennes.

### 7.3 Représentation adjointe - Racines

Dans le cas de la représentation adjointe, les poids non-nuls portent le nom de **racines**. Les éléments de  $H$  sont de poids nuls,

$$ad_h(h_i) = [h, h_i] = 0, \quad h \in H \quad (7.9)$$

et il n'y en a pas d'autre vecteur propre correspondant à  $\mu = 0$  car  $H$  est maximale. Le poids zéro est dégénéré  $r$  fois. Soit  $e_\alpha$  un vecteur propre associé à la racine  $\alpha$ ,

$$ad_h(e_\alpha) = [h, e_\alpha] = \alpha(h) e_\alpha \quad (7.10)$$

(on verra que les racines sont non dégénérées, ce qui est anticipé dans la notation).

**Théorème 7.2.** *Si  $\alpha \in H^*$  est une racine, alors  $-\alpha$  est aussi une racine.*

En effet, on a

$$[h, e_\alpha]^\dagger = -[h, e_\alpha^\dagger] = \alpha(h) e_\alpha^\dagger$$

et donc

$$ad_h(e_\alpha^\dagger) = [h, e_\alpha^\dagger] = -\alpha(h) e_\alpha^\dagger \quad (7.11)$$

On peut ainsi prendre  $e_{-\alpha} = e_\alpha^\dagger$ . Les vecteurs propres correspondant à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux. En effet, soit  $\alpha, \beta \in H^*$  et  $h_i$  tel que  $(\alpha + \beta)(h_i) \neq 0$ , alors

$$([h_i, e_\alpha], e_\beta) = -([e_\alpha, h_i], e_\beta) = -(e_\alpha, [h_i, e_\beta]) \quad (7.12)$$

donc

$$(\alpha + \beta)(h_i) (e_\alpha, e_\beta) = 0 \quad (7.13)$$

ce qui implique  $(e_\alpha, e_\beta) = 0$ . On normalise les  $e_\alpha$  de manière à avoir

$$(e_\alpha, e_\beta) = \frac{1}{\lambda} tr(e_\alpha^\dagger e_\beta) = \delta_{\alpha\beta} \quad (= \prod_i \delta_{\alpha_i \beta_i}). \quad (7.14)$$

Soit  $\pm\alpha$  une paire de racines et  $e_{\pm\alpha}$  les vecteurs propres correspondants. L'action des opérateurs  $e_{\pm\alpha}$  sur un vecteur propre  $f_{\mu,A}$  de la représentation  $s$  est facile à déterminer car

$$h(e_{\pm\alpha} f_{\mu,A}) = ([h, e_{\pm\alpha}] + e_{\pm\alpha} h) f_{\mu,A} = (\mu \pm \alpha)(h) (e_{\pm\alpha} f_{\mu,A}).$$



Par conséquent, si  $e_{\pm\alpha} f_{\mu,A}$  n'est pas nul, c'est un vecteur propre pour le poids  $\mu \pm \alpha$ . Les opérateurs  $e_{\pm\alpha}$  sont semblables aux opérateurs  $J^+$  et  $J^-$  de  $su(2)$ , qui font monter ou descendre les valeurs propres de  $J^3$  de une unité.

Ce résultat est en particulier vrai pour la représentation adjointe. Il en résulte immédiatement que le commutateur  $[e_\alpha, e_{-\alpha}]$  est dans la sous-algèbre de Cartan car  $ad_h([e_\alpha, e_{-\alpha}]) = (\alpha - \alpha)(h)[e_\alpha, e_{-\alpha}] = 0$ . Donc,  $[e_\alpha, e_{-\alpha}] = \sum_i \alpha_i h_i$ , où les coefficients  $\alpha_i$  se calculent aisément,

$$\alpha_i = (h_i, [e_\alpha, e_{-\alpha}]) = ([h_i, e_\alpha], e_{-\alpha}) = \alpha(h_i)(e_\alpha, e_{-\alpha}) = \alpha(h_i).$$

On peut par conséquent écrire

$$[e_\alpha, e_{-\alpha}] = \alpha \cdot h \quad (7.15)$$

avec  $\alpha \cdot h \equiv \sum_i \alpha_i h_i$ . Cette relation se réduit pour  $su(2)$  à  $[J^+, J^-] = J^3$ .

En normalisant bien les générateurs  $e_\alpha, e_{-\alpha}$  et  $\alpha \cdot h$ , on peut en fait écrire les relations de commutation exactement sous la forme standard de  $su(2)$ . Posant

$$e^\pm \equiv \frac{1}{|\alpha|} e_{\pm\alpha}, \quad e^3 \equiv \frac{1}{|\alpha|^2} \alpha \cdot h \quad (7.16)$$

on obtient facilement

$$[e^3, e^\pm] = \pm e^\pm, \quad [e^+, e^-] = e^3 \quad (7.17)$$

A chaque paire de racines non nulles  $\pm\alpha$  est donc associée une sous-algèbre  $su(2)$ . Toute représentation de  $L$  – et en particulier, l'algèbre de Lie  $L$  elle-même, c'–à-d. la représentation adjointe – se décompose en représentations (réductibles en général) de chacune de ses sous-algèbres  $su(2)$ , qui sont connues en détail. Le générateur  $e^+$  fait monter les poids de  $+\alpha$ , le générateur  $e^-$  fait descendre les poids de  $-\alpha$ .

**Théorème 7.3.** *Les racines (poids non nuls de la représentation adjointe) sont non dégénérées.*

**Démonstration :** Supposons qu'il y ait deux vecteurs propres  $e_\alpha, e'_\alpha$  associés à la racine  $\alpha$ ,  $[h, e_\alpha] = \alpha(h) e_\alpha, [h, e'_\alpha] = \alpha(h) e'_\alpha$ . On peut prendre  $e_\alpha$  et  $e'_\alpha$  orthogonaux,

$$(e_\alpha, e'_\alpha) = \frac{1}{\lambda} tr(e_\alpha^\dagger e'_\alpha) = \frac{1}{\lambda} tr(e_{-\alpha} e'_\alpha) = 0.$$

Les vecteurs  $e^-, e^3, e^+$  forment un sous-espace invariant sous le  $su(2)$  qu'ils engendrent (et se transforment dans la représentation adjointe - spin 1 - de ce  $su(2)$ ).

Nous avons découvert la clé des représentations des algèbres de Lie simples et compactes : ces représentations sont des représentations simultanées de sous-algèbres isomorphes à  $su(2)$ . Il reste à comprendre comment ces sous-algèbres se combinent de manière consistante ce qui se résume à comprendre la classification de telles algèbres. En particulier nous devons établir quel est le commutateur  $[e_\alpha, e_\beta]$  avec  $\alpha, \beta \in H^*$  des racines distinctes.

Autrement on redéfinit  $e'_\alpha$  comme  $\lambda e_\alpha + (1 - \lambda)e'_\alpha$  et on ajuste  $\lambda$ .

D'autre part,

$$ad_{e^3}(e'_\alpha) = [e^3, e'_\alpha] = |\alpha|^{-2}\alpha \cdot [h, e'_\alpha] = e'_\alpha.$$

Donc  $e'_\alpha$  possède un spin  $+1$ . En agissant avec  $e^+$  et  $e^-$ , on engendre un sous-espace invariant sous le  $su(2)$  considéré, qui est l'espace d'une représentation de spin  $j$  de  $su(2)$  pour un certain  $j$  entier.

Agissons avec  $e^- \equiv |\alpha|^{-1}e_{-\alpha}$  sur  $e'_\alpha$ . Le vecteur  $[e^-, e'_\alpha]$  possède le poids zéro et est donc dans la sous-algèbre de Cartan. Comme

$$\begin{aligned} (h_i, [e^-, e'_\alpha]) &= \frac{1}{\lambda} tr(h_i^\dagger [e^-, e'_\alpha]) = \frac{1}{\lambda} tr(h_i [e^-, e'_\alpha]) \\ &= \frac{1}{\lambda} tr([h_i, e^-] e'_\alpha) = \frac{1}{\lambda} \alpha_i tr(e^- e'_\alpha) \\ &= \frac{1}{\lambda |\alpha|} \alpha_i tr(e_{-\alpha} e'_\alpha) = 0, \end{aligned} \quad (7.18)$$

par orthogonalité, on en déduit que  $ad_{e^-}(e'_\alpha) = 0$  :  $e'_\alpha$  est un vecteur de spin minimum d'une représentation de la sous-algèbre  $su(2)$  engendrée par  $e^+, e^-, e^3$  ( $e'_\alpha$  est annihilé par  $e^-$ ). Ceci est une contradiction car les valeurs minima du spin dans une représentation de spin  $j$  quelconque sont  $\leq 0$  (égales à  $-j$ ). On en déduit qu'il n'y a pas de vecteur  $e'_\alpha$  et que les racines sont par conséquent de multiplicité égale à 1.  $\square$

Les racines étant non dégénérées, il n'est pas nécessaire d'introduire un indice supplémentaire pour caractériser les vecteurs  $e_\alpha$ . On a également :

**Théorème 7.4.** *Les seuls multiples d'une racine  $\alpha$  qui sont aussi une racine sont  $\pm\alpha$ .*

**Démonstration :** Soient  $\alpha$  une racine et  $e^+, e^-, e^3$  la sous-algèbre  $su(2)$  associée. On a bien sûr  $ad_{e^+}(e^+) = [e^+, e^+] = 0$  :  $e^+$  est un état de spin maximum, égal à 1. Supposons que  $k\alpha$  soit une racine avec  $k \neq 0, k \neq \pm 1$ . On sait que  $k$  est un entier ou un demi-entier. Imaginons d'abord que  $k$  soit un entier. Alors  $|k| \geq 2$  et le vecteur  $e_{k\alpha}$  ferait partie d'une représentation de spin  $\geq 2$ , qui contiendrait un autre état de spin 1, c-à-d., un autre vecteur propre associé à la racine  $\alpha$ , ce qui est impossible. Donc  $k$  ne peut être qu'un demi-entier. Mais si  $k$  est un demi-entier, il y a dans la représentation un état de spin  $1/2$ ,  $e_{\bar{\alpha}}$  avec  $\bar{\alpha} = \frac{\alpha}{2}$ . En considérant la sous-algèbre  $su(2)$  correspondante et en répétant l'argument de ci-dessus, on arrive à une contradiction.  $\square$

Considérons maintenant le commutateur  $[e_\alpha, e_\beta]$  où  $\alpha, \beta$  sont des racines. En utilisant l'identité de Jacobi, on a

$$[h_i, [e_\alpha, e_\beta]] = -[e_\alpha, [e_\beta, h_i]] - [e_\beta, [h_i, e_\alpha]] = (\alpha_i + \beta_i)[e_\alpha, e_\beta]. \quad (7.19)$$

Si  $\alpha + \beta$  est une racine, le commutateur  $[e_\alpha, e_\beta]$  peut être dénoté  $e_{\alpha+\beta}$ .  
 Si  $\alpha + \beta$  n'est pas une racine,  $[e_\alpha, e_\beta] = 0$ . On a donc

$$[e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha,\beta} e_{\alpha+\beta} \quad (7.20)$$

avec  $N_{\alpha,\beta} = 0$  si  $\alpha + \beta$  n'est pas une racine. On a immédiatement  $N_{\alpha,\beta} = -N_{\beta,\alpha}$ .

### Poids positifs - Vecteur de plus haut poids

Il est commode d'introduire une relation d'ordre parmi les poids. Etant donné une base de  $H^*$ , on dit que le poids  $\mu$  est positif si sa première composante non nulle est  $> 0$ . On écrit alors  $\mu > 0$ . On dit qu'il est négatif si sa première composante non nulle est  $< 0$ , ce qu'on écrit  $\mu < 0$ . Un poids  $\mu \neq 0$  est positif ou négatif. Si  $\mu > 0$ , alors  $-\mu < 0$ .

On dit que le poids  $\mu$  est plus grand que le poids  $\nu$ ,  $\mu > \nu$ , si  $\mu - \nu > 0$ . On dit aussi que  $\nu$  est plus petit que  $\mu$ . Si  $\mu \neq \nu$  n'est pas plus grand que  $\nu$ , alors  $\nu$  est plus grand que  $\mu$  (c'est un ordre total).

Comme le nombre de poids distincts dans toute représentation de dimension finie est fini, il existe un poids plus grand que tous les autres. On l'appelle le **poids le plus haut**. En particulier, il existe une **racine de plus haut poids**. Le vecteur propre correspondant au poids  $\mu$  le plus haut est annihilé par tout opérateur  $e_\alpha$  quand  $\alpha$  est une racine positive (sinon il y aurait un poids  $\mu + \alpha$  plus grand que  $\mu$ ).

Il nous faudra développer plus d'outils pour pouvoir écrire  $N_{\alpha,\beta}$  explicitement.

On rappelle  $h(f_{\mu,A}) = \mu(h)f_{\mu,A}$ .

On verra plus tard que le vecteur de poids le plus haut est non dégénéré.

## 7.4 Exemple : $su(3)$

### Matrices de Gell-Mann

Une base de matrices  $3 \times 3$  hermitiennes de trace nulle est donnée par les matrices de Gell-Mann,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ce sont des généralisations des matrices de Pauli dans le sens que les premières trois matrices de Gell-Mann contiennent les matrices de Pauli agissant sur un sous-espace

$$\lambda_a = \begin{pmatrix} \sigma_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a = 1, 2, 3. \quad (7.21)$$

Cela rend manifeste que  $\lambda_a, a = 1, 2, 3$  forme une sous-algèbre  $su(2)$  de  $su(3)$  qui mène par exponentiation à un sous-groupe  $SU(2)$  de  $SU(3)$ . Dans le cas où  $SU(3)$  modélise les interactions fortes, ce sous-groupe est appelé le sous-groupe d'isospin.

Traditionnellement, on prend comme générateurs de  $su(3)$  les matrices

$$T_a = \frac{1}{2}\lambda_a \quad (7.22)$$

qui sont telles que

$$\text{tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}. \quad (7.23)$$

Les matrices  $T_3$  et  $T_8$  sont diagonales et par conséquent commutent. Il n'y a pas d'autre matrice de  $su(3)$  qui commutent à la fois avec  $T_3$  et  $T_8$ . Ces deux matrices engendrent donc une sous-algèbre de Cartan de  $su(3)$ , qui est de rang 2. On note

$$h_1 \equiv T_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h_2 \equiv T_8 = \frac{\sqrt{3}}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (7.24)$$

*Poids de la représentation  $\mathbf{3}$  qui définit  $su(3)$*

Les poids de la représentation à trois dimensions qui définit  $su(3)$ , notée  $\mathbf{3}$ , sont faciles à déterminer car les matrices  $T_3$  et  $T_8$  sont diagonales. Les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont vecteurs propres simultanés de  $T_3 \equiv h_1$  et  $T_8 \equiv h_2$  et donnent les poids suivants :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left( \frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \quad (7.25)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left( -\frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \quad (7.26)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left( 0 \quad -\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \quad (7.27)$$

Ces 3 poids forment, dans  $H^*$ , les sommets d'un triangle équilatéral (voir Figure 7.1).

On normalise le produit scalaire entre vecteurs de la manière suivante

$$(x, y) = 2 \text{tr}(x^\dagger y) \quad (7.28)$$

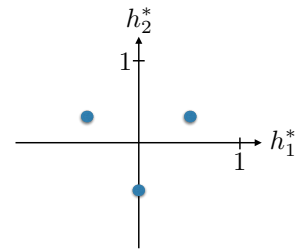


FIGURE 7.1: Les trois poids de la représentation  $\mathbf{3}$ .

### Poids de la représentation complexe conjuguée $\bar{\mathfrak{3}}$

Les matrices de la représentation complexe conjuguée sont  $-T_a^*$ . En effet, les vrais générateurs de  $su(3)$  sont anti-hermitiens et donnés par  $iT_a$  et quand on prend le complexe conjugué s'introduit donc un changement de signe.

Il en résulte que les poids de la représentation  $\bar{\mathfrak{3}}$  sont moins les poids de la représentation  $\mathfrak{3}$ , puisque les  $h_i$ , étant symétriques, sont représentés par  $-h_i$ . Ceci donne les trois poids

$$\left(-\frac{1}{2} \quad -\frac{\sqrt{3}}{6}\right), \left(\frac{1}{2} \quad -\frac{\sqrt{3}}{6}\right), \left(0 \quad \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad (7.29)$$

A nouveau, les poids forment les sommets d'un triangle équilatéral dans  $H^*$ , voir Figure 7.1.

On notera que les représentations  $\mathfrak{3}$  et  $\bar{\mathfrak{3}}$  sont clairement inéquivalentes puisque les poids correspondants sont différents et qu'on ne peut changer les valeurs propres d'une matrice par changement de base. Les représentations  $\mathfrak{3}$  et  $\bar{\mathfrak{3}}$  sont complexes. Ceci contraste avec l'équivalence des représentations  $\mathfrak{2}$  et  $\bar{\mathfrak{2}}$  de  $su(2)$  qui sont, comme vu en BAC3, pseudo-réelles<sup>1</sup>.

### Racines de $su(3)$

Les poids de la représentation adjointe, notée aussi  $\mathfrak{8}$  car elle est à huit dimensions, sont également faciles à obtenir. Si  $D$  est une matrice diagonale,  $D = \text{diag}(d_i)$  et  $N$  une matrice triangulaire supérieure (inférieure) avec des zéros partout sauf en position  $(i, j)$  ( $i \neq j$ ), on a

$$[D, N] = (d_i - d_j)N.$$

Cette équation peut être mise en correspondance avec  $ad_{h_i}e_i = \alpha(h)e_i$ . Les matrices qui diagonalisent l'action adjointe de  $T_3$  et  $T_8$  sont donc (en normalisant selon les conventions de la section précédente),

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(T_1 \pm iT_2) \equiv e_{\pm 1,0} \rightarrow \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & 0 \end{pmatrix} \quad (7.30)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(T_4 \pm iT_5) \equiv e_{\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}} \rightarrow \pm \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ & 0 \end{pmatrix} \quad (7.31)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(T_6 \pm iT_7) \equiv e_{\mp \frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}} \rightarrow \pm \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.32)$$

relations dans lesquelles nous avons écrit les racines correspondantes. En outre on a le poids  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$  doublement dégénéré.

Les racines de  $su(3)$  sont les sommets d'un hexagone régulier, le centre étant le poids nul doublement dégénéré. On remarque que les différences des poids des représentations  $\mathfrak{3}$  sont des racines, cela sera expliqué à la section suivante. Enfin, la représentation  $\mathfrak{8}$  est réelle

Une autre manière d'arriver à la même conclusion est d'observer que pour les représentations unitaires, la représentation complexe conjuguée ( $x \rightarrow (s(x))^*$ ) est identique à la représentation duale ( $x \rightarrow -(s(x))^t$ ) : les matrices symétriques changent de signe, les matrices antisymétriques sont invariantes.

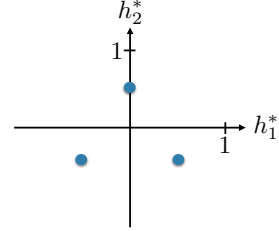


FIGURE 7.2: Les trois poids de la représentation  $\bar{\mathfrak{3}}$ .

1. Une représentation est pseudo-réelle lorsque la représentation est sa conjuguée sont équivalentes mais quand il n'existe pas de base où les matrices de représentation sont réelles.

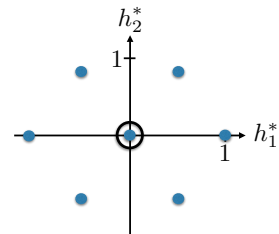


FIGURE 7.3: Poids de la représentation  $\mathfrak{8}$  (le poids nul est doublement dégénéré).

car la base trouvée est réelle et ses poids sont bien invariants sous  $\mu \rightarrow -\mu$ .

Les figures ci-dessous indiquent les poids positifs et négatifs des représentations **3**,  $\bar{\mathbf{3}}$  et **8**. On voit en particulier que les racines positives sont

$$\alpha_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \alpha_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \alpha_3 = (1, 0). \quad (7.33)$$

La racine  $\alpha_3$  est de plus haut poids.

### 7.5 Chaînes de poids et chaînes de racines

Examinons de plus près la manière dont le  $su(2)$  engendré par  $e^+, e^-$  et  $e^3$  agit dans une représentation  $s$  de l'algèbre de Lie (simple, compacte)  $L$ . Soient  $\mu$  un poids quelconque de cette représentation et  $f_{\mu,A}$  le vecteur propre correspondant. On a

$$e^3 f_{\mu,A} = \frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} f_{\mu,A}. \quad (7.34)$$

Comme les seules valeurs propres possibles de  $e^3$  sont des entiers ou des demi-entiers, on en déduit que pour toute racine et pour tout poids,

$$\frac{2\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} \in \mathbb{Z}. \quad (7.35)$$

Le vecteur  $f_{\mu,A}$  peut être écrit comme combinaison linéaire de vecteurs de même spin  $\frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha^2}$  appartenant chacun à une représentation de spin bien défini. Supposons que le spin le plus grand qui apparaisse dans la décomposition soit  $j$ . Il existe alors un entier non-négatif  $p$  tel que

$$(e^+)^p f_{\mu,A} \neq 0, \quad (e^+)^{p+1} f_{\mu,A} = 0. \quad (7.36)$$

Le vecteur  $(e^+)^p f_{\mu,A}$  a pour poids  $\mu + p\alpha$  et, puisque c'est le vecteur de plus haut poids de la représentation de spin  $j$  du  $su(2)$  considéré, on a

$$\frac{\alpha \cdot (\mu + p\alpha)}{\alpha^2} = \frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} + p = j. \quad (7.37)$$

Le vecteur de plus bas poids de la représentation de spin  $j$  du  $su(2)$  considéré se trouve en agissant avec  $e^-$  un certain nombre  $q$  de fois,

$$(e^-)^q f_{\mu,A} \neq 0, \quad (e^-)^{q+1} f_{\mu,A} = 0. \quad (7.38)$$

Le vecteur  $(e^-)^q f_{\mu,A}$  a pour poids  $\mu - q\alpha$  et, puisque c'est le vecteur de plus bas poids de la représentation de spin  $j$  du  $su(2)$  considéré, on a

$$\frac{\alpha \cdot (\mu - q\alpha)}{\alpha^2} = \frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} - q = -j. \quad (7.39)$$

On a ainsi une **chaîne de poids**  $\mu - q\alpha, \mu - (q-1)\alpha, \dots, \mu, \dots, \mu + (p-1)\alpha, \mu + p\alpha$  qui apparaissent dans la représentation. Soustrayant

(7.37) à (7.39) on trouve bien que le spin  $j = \frac{p+q}{2}$ . Dans le cas de la représentation adjointe, on parle de **chaîne de racines**.

Ajoutant (7.37) à (7.39), on obtient

$$\frac{2\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} + p - q = 0$$

ou encore

$$\boxed{\frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} = -\frac{1}{2}(p - q)}. \quad (7.40)$$

Appliquons (7.40) à la représentation adjointe, avec  $\mu \equiv \beta$  une racine. On a

$$\frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha^2} = -\frac{1}{2}(p - q). \quad (7.41)$$

Si on considère le  $su(2)$  associé à  $\beta$ , on obtient de la même façon

$$\frac{\beta \cdot \alpha}{\beta^2} = -\frac{1}{2}(p' - q'). \quad (7.42)$$

Si  $p' - q' \neq 0$  alors  $p - q \neq 0$  et en divisant (7.41) par (7.42) on obtient

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{p - q}{p' - q'}. \quad (7.43)$$

Donc  $p - q$  et  $p' - q'$  ont le même signe. Cette relation permet de contraindre les ratios des longueurs des racines.

Multipliant ces deux équations donne une formule pour l'angle  $\theta_{\alpha\beta}$  entre les racines  $\alpha$  et  $\beta$ ,

$$\cos^2 \theta_{\alpha\beta} = \frac{(\alpha \cdot \beta)^2}{\alpha^2 \beta^2} = \frac{(p - q)(p' - q')}{4}. \quad (7.44)$$

Comme  $(p - q)(p' - q')$  est un entier (non négatif) et que  $0 \leq \cos^2 \theta_{\alpha\beta} \leq 1$ , il n'existe que cinq possibilités pour  $(p - q)(p' - q')$  : 0, 1, 2, 3, 4. Le dernier cas donne  $\theta_{\alpha\beta} = 0$  ou  $\pi$ , ou encore  $\beta = k\alpha$  et les seules possibilités sont  $\beta = \pm\alpha$ .

Les autres cas conduisent à (on prend  $0 \leq \theta_{\alpha\beta} \leq \pi$ ) :

$(p - q)(p' - q')$	$\theta_{\alpha\beta}$	Ratio des longueurs
0	$\frac{\pi}{2}$	non fixé
1	$\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3}$	1
2	$\frac{\pi}{4}$ ou $\frac{3\pi}{4}$	$\sqrt{2}$ ou $\frac{1}{\sqrt{2}}$
3	$\frac{\pi}{6}$ ou $\frac{5\pi}{6}$	$\sqrt{3}$ ou $\frac{1}{\sqrt{3}}$

Les angles entre les racines et leurs ratios de longueurs sont donc remarquablement contraints.

Cette formule jouera un rôle clé par la suite. Il est utile de la mémoriser. Encore une fois : pour chaque sous-groupe  $su(2)$  de l'algèbre générée par la racine  $\alpha$  et pour chaque poids  $\mu$  de la représentation, il existe deux entiers  $p \geq 0$  et  $q \geq 0$  tels que la plus grande chaîne de poids passant par  $\mu$  est décrite par  $\mu - q\alpha, \dots, \mu + p\alpha$  et ces quantités obéissent à la relation (7.40).

FIGURE 7.4: Voyons quelques exemples de chaînes de poids pour la représentation 3 de  $su(3)$ . Comme vu précédemment, les racines positives sont données graphiquement par

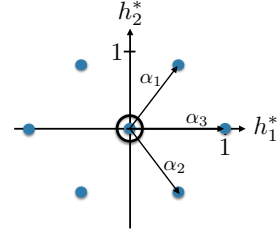


FIGURE 7.5: Pour les chaînes de poids de 3 associées à la racine  $\alpha_1$ , on trouve une chaîne de spin 0 ( $p = q = 0$ ) et une chaîne de spin  $\frac{1}{2}$  ( $p + q = 1$ )

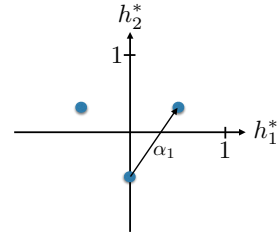
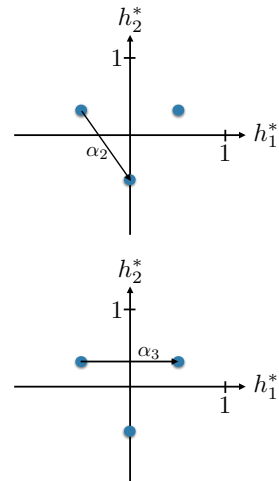


FIGURE 7.6: Il en va de même pour les chaînes de poids associées aux racines  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  :



## 7.6 Racines simples

On appelle racine simple toute racine positive qui ne peut être écrite comme la somme de deux racines positives. Par exemple, dans le cas de  $su(3)$ ,  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont simples tandis que  $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$  n'est pas simple.

### Propriétés des racines simples

1. Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont des racines simples, alors ni  $\alpha - \beta$ , ni  $\beta - \alpha$  ne sont des racines. En effet, si  $\pm(\alpha - \beta)$  sont des racines, alors l'une des deux est positive, soit  $\alpha - \beta$ . Mais alors  $\alpha = (\alpha - \beta) + \beta$  est une somme de racines positives, contrairement à l'hypothèse.
2. L'angle  $\theta_{\alpha\beta}$  entre deux racines simples est obtus,

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta_{\alpha\beta} < \pi. \quad (7.45)$$

En effet, comme  $\beta - \alpha$  n'est pas une racine, on a par (7.20)

$$[e_{-\alpha}, e_{\beta}] = 0.$$

et donc la chaîne de racines  $\beta + k\alpha$  passant par  $\beta$  commence par  $\beta$  ( $k \geq 0$ ). On a donc  $q = 0$  dans la formule (7.41),

$$\frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha^2} = -\frac{p}{2}. \quad (7.46)$$

De la même manière,  $[e_{-\beta}, e_{\alpha}] = 0$  et donc  $q' = 0$  dans la formule (7.42),

$$\frac{\alpha \cdot \beta}{\beta^2} = -\frac{p'}{2}. \quad (7.47)$$

Il en résulte

$$\cos \theta_{\alpha\beta} = -\frac{\sqrt{pp'}}{2}, \quad \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{p'}{p} \quad (7.48)$$

ce qui implique en particulier le résultat annoncé.

3. Les racines simples sont linéairement indépendantes. Ceci est une conséquence directe du résultat précédent. Soit

$$\gamma = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \alpha = 0$$

une combinaison linéaire des racines simples qui est nulle. Seules les racines avec  $\lambda_{\alpha} \neq 0$  apparaissent, donc on peut supposer  $\lambda_{\alpha} \neq 0$ . Si tous les  $\lambda_{\alpha}$  ont le même signe, par exemple  $\lambda_{\alpha} > 0$ , alors  $\gamma > 0$  et donc  $\gamma \neq 0$  contrairement à l'hypothèse. Donc il y a des coefficients positifs et des coefficients négatifs et on peut écrire  $\gamma = \mu - \nu$  où  $\mu$  et  $\nu$  sont strictement positifs,

$$\mu = \sum_{\lambda_{\alpha} > 0} \lambda_{\alpha} \alpha, \quad \nu = - \sum_{\lambda_{\alpha} < 0} \lambda_{\alpha} \alpha$$



et on sait que  $\mu \cdot \nu \leq 0$ . Mais on obtient alors une contradiction car

$$0 = \gamma^2 = \mu^2 + \nu^2 - 2\mu \cdot \nu \geq \mu^2 + \nu^2 > 0. \quad \square$$

4. Toute racine positive peut s'écrire comme combinaison linéaire à coefficients entiers non négatifs des racines simples. En effet, soit  $\phi$  une racine positive. Si  $\phi$  est simple, l'assertion est démontrée. Si  $\phi$  n'est pas simple, on a  $\phi = \phi_1 + \phi_2$  avec  $\phi_1$  et  $\phi_2$  racines positives strictement plus petites que  $\phi$ . Si  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont simples, c'est terminé. Sinon, on continue. Le processus s'arrête car on a un nombre fini de racines positives. On conclut en particulier que toutes les racines appartiennent au réseau  $\mathbb{Z}\alpha_i$  engendré par les racines simples.
5. Les racines simples forment une base de  $H^*$ . En effet, on sait déjà qu'elles sont linéairement indépendantes. Il suffit par conséquent de montrer qu'elles forment un système complet. Si cela n'était pas vrai, il y aurait un élément  $\xi$  de  $H^*$  orthogonal à toutes les racines simples et donc aussi à toutes les racines par le point précédent. Par conséquent, on aurait  $[\xi \cdot h, e_\phi] = \phi(\xi \cdot h)e_\phi = (\phi \cdot \xi)e_\phi = 0$ . Mais on aurait aussi  $[\xi \cdot h, h_i] = 0$ , donc  $\xi \cdot h$  commuterait avec toute l'algèbre, qui ne serait pas simple.  $\square$

On en déduit que le nombre de racines simples est égal au rang  $r$  de l'algèbre.

#### *Détermination de toutes les racines à partir des racines simples*

Connaissant les racines simples  $\alpha_i$ , on peut très facilement déterminer toutes les racines. Soit  $\alpha$  une racine positive (les racines négatives s'obtiennent par changement de signe). On appelle hauteur de  $\alpha$  la somme

$$k = \sum_i k_i \tag{7.49}$$

où les entiers non négatifs  $k_i$  sont les coefficients du développement de  $\alpha$  en terme des racines simples,

$$\alpha = \sum_i k_i \alpha_i. \tag{7.50}$$

Les racines simples  $\alpha_i$  sont de hauteur 1.

**Théorème 7.5.** *Si  $\alpha$  est une racine positive de hauteur  $\ell + 1$  ( $\ell \geq 1$ ), alors il existe une racine  $\beta$  de hauteur  $\ell$  et une racine simple  $\alpha_k$  telles que*

$$\alpha = \beta + \alpha_k. \tag{7.51}$$

*Démonstration.* On prouve cette proposition par l'absurde en prouvant que les deux cas suivants sont absurdes : (i) il n'existe pas de

racine simple  $\alpha_k$  telle que  $\alpha = \beta + \alpha_k$  mais il existe une racine simple  $\alpha_l$  telle que  $[e_{-\alpha_l}, e_\alpha] \neq 0$ ; (ii) il n'existe pas de racine simple  $\alpha_k$  telle que  $\alpha = \beta + \alpha_k$  et pour toute racine  $\alpha_i$ , on a  $[e_{-\alpha_i}, e_\alpha] = 0$ .

Dans le cas (i), on construit  $[e_{\alpha_l}, [e_{-\alpha_l}, e_\alpha]]$  qui est proportionnel à  $e_\alpha$  par unicité du vecteur propre associé à  $\alpha_l$ . Dès lors,  $\alpha - \alpha_l$  est une racine de hauteur  $\ell$  telle que  $\alpha = (\alpha - \alpha_l) + \alpha_l$  ce qui contredit l'hypothèse. Dans le cas (ii), comme  $[e_{-\alpha_i}, e_\alpha] = 0$  pour toutes les racines simples,  $e_\alpha$  est état de spin minimum pour tous les  $su(2)$  associés aux racines simples, c-à-d.  $\alpha \cdot \alpha_k \leq 0$  ( $q = 0$ ), d'où on tirerait la contradiction

$$\alpha \cdot \alpha = \alpha \cdot \left( \sum_i k_i \alpha_i \right) \leq 0.$$

□

Inversément, si on connaît toutes les racines de hauteur  $\ell$ , on peut déterminer les racines de hauteur  $\ell + 1$  en considérant les chaînes de racines simples passant par les racines de hauteur  $\ell$  : soit  $\phi$  une racine de hauteur  $\ell$ . On a

$$\frac{2\alpha_i \cdot \phi}{\alpha_i^2} = -(p_{\alpha_i} - q_{\alpha_i}). \tag{7.52}$$

Comme  $q_{\alpha_i}$  est connu (on connaît toutes les racines de hauteur  $\leq \ell$ ), on obtient  $p_{\alpha_i}$ . Si  $p_{\alpha_i} > 0$ ,  $\phi + \alpha_i$  est une racine.

*Exemple* Les vecteurs  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  tels que

$$\alpha_1 \cdot \alpha_1 = 1, \quad \alpha_1 \cdot \alpha_2 = -1, \quad \alpha_2 \cdot \alpha_2 = 2$$

sont les racines simples d'une algèbre de Lie de rang 2 (voir plus bas).

On a

$$\frac{2\alpha_1 \cdot \alpha_2}{\alpha_1^2} = -2, \quad \frac{2\alpha_2 \cdot \alpha_1}{\alpha_2^2} = -1$$

et par conséquent  $\alpha_1 + \alpha_2$  est une racine, ainsi que  $2\alpha_1 + \alpha_2$ . Il n'y a pas de racine de hauteur 4 car ni  $3\alpha_1 + \alpha_2$  ni  $2\alpha_1 + 2\alpha_2$  ne sont des racines. Pour  $3\alpha_1 + \alpha_2$ , c'est évident parce que la chaîne de racines  $\alpha_2, \alpha_2 + \alpha_1, \alpha_2 + 2\alpha_1$  s'arrête à  $\alpha_2 + 2\alpha_1$  car elle a  $q = 0$  ( $\alpha_2 - \alpha_1$  n'est pas une racine) et  $p - q = 2 \Rightarrow p = 2$ . Pour  $2\alpha_1 + 2\alpha_2$ , c'est également évident car  $\alpha_1 + \alpha_2$  est une racine et donc  $2(\alpha_1 + \alpha_2)$  n'en est pas une.

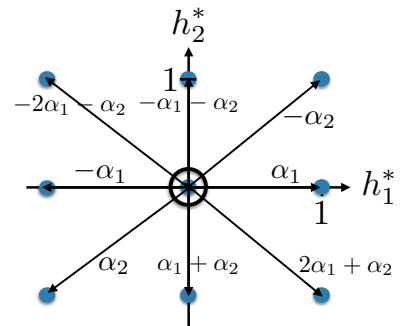
Il est instructif de vérifier que  $2(\alpha_1 + \alpha_2)$  n'est pas une racine en considérant la chaîne de racines  $2\alpha_1 + \alpha_2 + k\alpha_2$  passant par  $2\alpha_1 + \alpha_2$ . On a  $q = 0$  car  $2\alpha_1$  n'est pas une racine. D'autre part,

$$(2\alpha_1 + \alpha_2) \cdot \alpha_2 = 0,$$

ce qui implique  $p - q = 0$  et donc aussi  $p = 0$ , ce que l'on veut démontrer.

En résumé, il y a 4 racines positives, 4 racines négatives et 2 poids nuls. L'algèbre est à 10 dimensions. On verra plus bas que c'est  $so(5)$ .

FIGURE 7.7: Soit la base Euclidienne  $h_1^* = (1,0), h_2^* = (0,1)$ . En posant  $\alpha_1 = h_1^*, \alpha_2 = -h_1^* - h_2^*$  on représente les racines comme suit :



### Groupe de Weyl

Soit  $\alpha$  une racine positive quelconque et  $\beta$  une racine. On sait que le nombre

$$2 \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha^2}$$

est un entier. L'image de  $\beta$  par la réflexion dans l'hyperplan perpendiculaire à  $\alpha$ ,

$$\beta \rightarrow \beta' = \beta - 2 \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha^2} \alpha \quad (7.53)$$

appartient donc au réseau engendré par les racines simples<sup>2</sup>. En fait, c'est une racine. En effet, la chaîne de racines  $\alpha$  passant par  $\beta$  a la forme

$$\beta - q\alpha, \beta - (q-1)\alpha, \dots, \beta - \alpha, \beta, \beta + \alpha, \dots, \beta + (p-1)\alpha, \beta + p\alpha \quad (7.54)$$

avec

$$p - q = -2 \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha^2}.$$

Par conséquent l'entier  $-2 \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha^2}$  est compris entre  $-q$  et  $p$ ,

$$-q \leq -2 \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha^2} \leq p.$$

Il en résulte que

$$\beta - 2 \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha^2} \alpha$$

appartient à la chaîne (7.54) et est donc une racine. Les réflexions (7.53) laissent donc le système de racines invariant.

On appelle **groupe de Weyl** le groupe engendré par les **réflexions de Weyl** (7.53). C'est un groupe cristallographique fini<sup>3</sup>. On vérifie facilement que dans le cas de  $su(3)$ , le groupe de Weyl est le groupe  $S_3$  ( $\equiv$  groupe diédral  $D_3$ ) de symétrie du triangle équilatéral.

Le groupe de Weyl est fini car il existe un homomorphisme du groupe de Weyl dans le groupe fini  $S_\Delta$  des permutations des racines. Cet homomorphisme est injectif car si un élément du groupe de Weyl fixe toutes les racines, il fixe l'espace linéaire engendré par les racines, qui est tout  $H^*$ . C'est donc l'identité. Le groupe de Weyl est ainsi isomorphe à un sous-groupe de  $S_\Delta$ .

### 7.7 Matrice de Cartan - Diagrammes de Dynkin

On a vu que les racines simples forment une base de  $H^*$ . Cette base n'est pas orthonormée car chaque racine simple est au moins non-orthogonale à une autre<sup>4</sup>. Les angles entre les racines simples non-orthogonales sont soit  $120^\circ$ ,  $135^\circ$  ou  $150^\circ$  et ratios des longueurs

2. A noter que  $\alpha$  et  $-\alpha$  donnent la même réflexion, c'est pourquoi on peut supposer la racine  $\alpha$  positive.

3. On rappelle qu'un groupe cristallographique est un groupe qui préserve un réseau.

4. En effet, si une racine simple  $\alpha$  était orthogonale à toutes les autres, on aurait  $p = q = 0$  dans (7.41) (car  $q = 0$  pour les racines simples) et donc le vecteur correspondant  $e_\alpha$  commuterait avec tous les autres vecteurs  $e_\beta$  par (7.20) puisque  $\alpha + \beta$  n'est pas une racine. Alors  $\{e_{-\alpha}, h_1, e_\alpha\}$  formerait un idéal de l'algèbre et l'algèbre ne serait pas simple.

sont respectivement 1,  $\sqrt{2}$  et  $\sqrt{3}$ , comme résumé dans la table présentée en section 7.5. Il est alors naturel de définir la matrice de Cartan qui encode ces angles et longueurs avec des entiers,

$$A = (A_{ij}), \quad A_{ij} = 2 \frac{\alpha_i \cdot \alpha_j}{\alpha_j^2}. \quad (7.55)$$

Le fait que les coefficients soient entiers est une propriété fondamentale de la matrice de Cartan. On appelle d'ailleurs ses entrées les entiers de Cartan. Plus précisément, elle a uniquement des 2 sur la diagonales et des entiers 0, -1, -2 ou -3 hors diagonale (vu les contraintes sur les angles et longueurs). Elle n'est pas toujours symétrique mais jouit de la propriété que si  $A_{ij} \neq 0$ , alors  $A_{ji} \neq 0$ .

On a vu que les racines positives peuvent être exprimées en termes de combinaisons linéaires des racines simples,  $\phi = \sum_i k_i \alpha_i$ . Les coefficients  $k_i$  ne rendent pas manifeste la représentation de la racine  $\phi$  sous les différentes sous-algèbres  $su(2)$  générées par les racines simples. Plutôt, cette information est explicite dans les coefficients  $q_{\alpha_i} - p_{\alpha_i}$  associés aux racines simples  $\alpha_i$  par (7.52). En fait, ces deux  $r$ -tuples d'entiers sont reliés entre eux par le changement de base,

$$q_{\alpha_j} - p_{\alpha_j} = \frac{2\phi \cdot \alpha_j}{\alpha_j \cdot \alpha_j} = \sum_i k_i \frac{2\alpha_i \cdot \alpha_j}{\alpha_j \cdot \alpha_j} = \sum_i k_i A_{ij} \quad (7.56)$$

où  $A_{ij}$  est précisément la matrice de Cartan.

La matrice de Cartan encode toute l'algèbre puisque les racines simples permettent de déduire toutes les racines, et on peut reconstruire l'algèbre à partir des racines, comme discuté plus bas. La matrice de Cartan permet d'ailleurs de simplifier la procédure de reconstruction des racines à partir des racines simples. Quand on passe de  $\phi$  à  $\phi + \alpha_i$  en agissant avec le générateur  $e^+ = \frac{1}{|\alpha_i|} e_{\alpha_i}$ , cela change uniquement  $k_i$  en  $k_i + 1$  et donc  $q_{\alpha_j} - p_{\alpha_j}$  en  $q_{\alpha_j} - p_{\alpha_j} + A_{ij}$ . Si on pense à  $q_{\alpha_j} - p_{\alpha_j}$  comme un vecteur ligne, c'est équivalent à simplement ajouter la  $i$ ème ligne de la matrice de Cartan qui est juste le vecteur  $q_{\alpha_j} - p_{\alpha_j}$  associé à la racine  $\alpha_j$ .

On peut représenter graphiquement la matrice de Cartan par un diagramme de Dynkin. A chaque racine, on associe un noeud du diagramme de Dynkin correspondant. On trace un nombre d'arêtes entre le noeud  $i$  et le noeud  $j$  égal à  $\max\{|A_{ij}|, |A_{ji}|\}$ .

Si les longueurs entre les racines simples sont distinctes, il y a deux conventions dans la littérature : soit on met une flèche qui pointe vers  $i$  (respectivement  $j$ ) si  $|A_{ij}| < |A_{ji}|$  (respectivement  $|A_{ji}| < |A_{ij}|$ ) - la flèche pointe donc vers la racine la plus courte lorsque  $\alpha_i$  et  $\alpha_j$  ont des longueurs différentes, soit on colorie en noir les noeuds associés aux racines les plus courtes. Les seules possibilités sont

Il existe deux conventions dans la littérature pour la définition de la matrice de Cartan. L'autre convention est la transposée  $A_{ij} = 2 \frac{\alpha_i \cdot \alpha_j}{\alpha_i^2}$ . Nous suivons ici la convention du livre de Georgi.

Le diagramme de Dynkin de  $so(5)$  est



La matrice de Cartan est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

On a  $|A_{12}| < |A_{21}|$  (racine  $\alpha_1$  la plus courte).

Le diagramme de Dynkin de  $su(3)$  est



La matrice de Cartan est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- pas d'arête, angle de  $\pi/2$  entre les racines ;
- une arête, angle de  $2\pi/3$  entre les racines qui sont de même longueur ;
- deux arêtes, angle de  $3\pi/4$  entre les racines de ratio de longueur  $\sqrt{2}$  ;
- trois arêtes, angle de  $5\pi/6$  entre les racines de ratio de longueur  $\sqrt{3}$ .

### 7.8 Construction de l'algèbre à partir des racines simples

On peut reconstruire complètement l'algèbre à partir des racines simples  $\alpha_i$  comme nous allons le montrer dans cette section. Celles-ci, les vecteurs  $e_i, f_i \equiv e_i^\dagger$  correspondants et les éléments de l'algèbre de Cartan obéissent aux relations

$$[h, h'] = 0, \quad [h, e_i] = \alpha_i(h)e_i, \quad [h, f_i] = -\alpha_i(h)f_i, \quad [e_i, f_j] = \delta_{ij} \alpha_i \cdot h \quad (7.57)$$

Ces relations s'appellent les relations de Chevalley. Elles sont invariantes sous la transformation<sup>5</sup> :

$$\tau(h) = -h, \quad \tau(e_i) = -f_i, \quad \tau(f_i) = -e_i \quad (7.58)$$

(les nombres  $\alpha_i$  sont invariants), de carré identité. Il y a d'autres relations entre les générateurs  $h_i, e_i, f_i$  qui viennent des conditions sur les chaînes de racines, comme les relations de Serre (voir plus bas et exercices).

Les vecteurs  $e_\alpha$  associés aux racines positives s'obtiennent à partir des chaînes de racines passant par les racines simples et prennent donc la forme de multicommutateurs impliquant les  $e_i$  seulement. De même, les vecteurs  $e_{-\alpha}$  associés aux racines négatives prennent la forme de multicommutateurs impliquant les  $f_i$  seulement. En fait, tout vecteur de l'algèbre de Lie peut s'écrire comme combinaison linéaire des  $h_i$ , des multicommutateurs impliquant les  $e_i$  et des multicommutateurs impliquant les  $f_i$ . L'algèbre de Lie  $L$  se décompose donc comme somme directe d'espaces vectoriels

$$L = N^- \oplus H \oplus N^+ \quad (7.59)$$

où les  $N^-, H$  et  $N^+$  sont des sous-algèbres (mais attention, c'est une somme directe de sous-vectoriels, pas une somme directe de sous-algèbres car ces sous-algèbres ne commutent pas). On a  $[H, N^+] \subset N^+, [H, N^-] \subset N^-$ . La décomposition (7.59) s'appelle la décomposition triangulaire de  $L$ . On notera également qu'en utilisant l'identité de Jacobi si nécessaire, on peut ramener tout multicommutateur contenant les  $e_i$  (respectivement, les  $f_i$ ) en une combinaison

5. On peut récrire cette transformation sous la forme  $\tau(x) = -x^\dagger$ .

linéaire de multicommutateurs "emboîtés" de la forme

$$[e_{i_1}, [e_{i_2}, [e_{i_3}, [\dots, [e_{i_{k-1}}, e_{i_k}]] \dots]] = ad_{e_{i_1}} ad_{e_{i_2}} \dots ad_{e_{i_{k-1}}} e_{i_k}.$$

Par exemple,

$$\begin{aligned} [[e_1, e_2], [e_3, e_4]] &= -[[[e_1, e_2], e_3], e_4] - [e_3, [[e_1, e_2], e_4]] \\ &= -ad_{e_4} ad_{e_3} ad_{e_1} e_2 + ad_{e_3} ad_{e_4} ad_{e_1} e_2. \end{aligned}$$

L'involution de Chevalley  $\tau$  s'étend à toute l'algèbre comme automorphisme,  $\tau([x, y]) = [\tau(x), \tau(y)]$ . L'existence de l'involution de Chevalley permet de déterminer toute l'algèbre quand on connaît  $N^+$ . Dans la suite, nous ne nous intéresserons donc qu'aux racines positives.

A chaque racine positive  $\alpha$  est associé un vecteur  $e_\alpha$  déterminé à une phase près (car les racines sont non dégénérées, la phase vient de l'ambiguïté de phase des représentations de  $su(2)$ ). Ce vecteur se transforme selon une représentation de spin  $j$  (qui dépend de  $i$ ) pour le  $su(2)$  engendré par  $e_i$ . Rappelons qu'avec le choix de phase standard, les opérateurs  $J^3, J^+$  et  $J^-$  agissent de la manière suivante :

$$J^3 |j, m\rangle = m |j, m\rangle \quad (7.60)$$

$$J^+ |j, m\rangle = \sqrt{(j+m+1)(j-m)/2} |j, m+1\rangle \quad (7.61)$$

$$J^- |j, m\rangle = \sqrt{(j+m)(j-m+1)/2} |j, m-1\rangle \quad (7.62)$$

En partant des vecteurs  $e_i$  associés aux racines simples et en prenant leurs commutateurs en suivant les chaînes de racines, on obtient toute l'algèbre. Montrons comment cela fonctionne pour l'algèbre  $B_2 \equiv C_2 \equiv so(5)$  étudiée ci-dessus. Les racines simples sont  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  avec

$$\alpha_1 \cdot \alpha_1 = 1, \quad \alpha_1 \cdot \alpha_2 = -1, \quad \alpha_2 \cdot \alpha_2 = 2. \quad (7.63)$$

Dans une base orthonormée, on peut prendre  $\alpha_1 = (1, 0)$  et  $\alpha_2 = (-1, 1)$ .

Les sous-algèbres  $su(2)$  respectivement associées à  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont :

$$e^+ = e_1, \quad e^- = e_1^\dagger, \quad e^3 = h_1 \quad (7.64)$$

$$E^+ = \frac{e_2}{\sqrt{2}}, \quad E^- = \frac{e_2^\dagger}{\sqrt{2}}, \quad E^3 = \frac{-h_1 + h_2}{2} \quad (7.65)$$

A la hauteur 1, on a les racines  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  avec pour vecteurs propres  $e_1$  et  $e_2$ . A la hauteur 2, on a la racine  $\alpha_1 + \alpha_2$  dont le vecteur propre  $e_{\alpha_1 + \alpha_2}$  est proportionnel à  $[e_1, e_2]$ . Fixons la phase en suivant les conventions standards pour le  $su(2)$  associé à  $\alpha_1$ . La chaîne de racines  $\alpha_2, \alpha_2 + \alpha_1, \alpha_2 + 2\alpha_1$  décrit une représentation de  $su(2)$  de spin 1, dont

Pour le spin  $\frac{1}{2}$  on a

$$J^+ |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$$

$$J^- |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$$

Pour le spin 1 on a

$$J^+ |1, -1\rangle = |1, 0\rangle$$

$$J^+ |1, 0\rangle = |1, 1\rangle$$

$$J^- |1, 1\rangle = |1, 0\rangle$$

$$J^- |1, 0\rangle = |1, -1\rangle$$

$e_2$  est le vecteur dont le "moment cinétique selon  $z$ " (valeur propre de  $e^3$ ) est minimum ( $e_2$  est annihilé par  $e^-$ ,  $ad_{e^-}e_2 = [e^-, e_2] = 0$ ),  $e_2 \equiv |1, -1\rangle$ . Le vecteur  $|1, 0\rangle$  dont le "moment cinétique selon  $z$ " est nul s'obtient en agissant une fois avec  $e^+$ , avec un facteur égal à 1 d'après les formules ci-dessus :

$$e_{\alpha_1+\alpha_2} = ad_{e^+}(e_2) = [e_1, e_2]. \quad (7.66)$$

On augmente encore le spin de une unité en agissant avec  $e^+$  (et un facteur toujours égal à 1 d'après les formules ci-dessus :

$$e_{2\alpha_1+\alpha_2} = ad_{e^+}([e_1, e_2]) = [e_1, [e_1, e_2]] \quad (7.67)$$

(vecteur de spin maximum  $|1, 1\rangle$ ).

Il est intéressant de considérer le vecteur  $e_{\alpha_1+\alpha_2}$  du point de vue du  $su(2)$  associé à  $\alpha_2$ . Les vecteurs  $e_1$  et  $e_{\alpha_1+\alpha_2}$  se transforment selon la représentation de spin  $1/2$ . On a  $e_1 \equiv |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$  puisque  $ad_{E^-}(e_1) = 0$ . On obtient le vecteur  $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$  de spin maximum en agissant avec  $\sqrt{2}E^+$  (voir formules ci-dessus), ce qui donne  $[e_2, e_1] = -[e_1, e_2]$ . En ayant choisi  $[e_1, e_2]$  comme vecteur propre de spin maximum (associé à la racine  $\alpha_1 + \alpha_2$ ), on a donc introduit un signe  $-1$  par rapport aux conventions standards de ce  $su(2)$ .

Ayant déterminé les vecteurs propres associés aux racines, on peut reconstruire tous les commutateurs en utilisant l'identité de Jacobi.

## 7.9 Poids fondamentaux

On a vu que toute représentation d'une algèbre compacte possède un plus haut poids  $\mu$  qui a la propriété d'être plus haut que tous les autres poids de la représentation et qui est donc unique (la relation  $<$  est une relation d'ordre total). Nous démontrons dans cette section un certain nombre de propriétés du poids fondamental d'une représentation irréductible. Cela permettra de classer les représentations irréductibles distinctes d'une algèbre de Lie simple compacte. Dans toute cette section, les représentations sont irréductibles même si cela n'est pas explicitement répété.

### Poids le plus haut et racines positives

Considérons une représentation irréductible  $s$  de l'algèbre de Lie  $L$ . Soit  $V$  l'espace de la représentation. Les opérateurs  $s(e_\alpha) \equiv e_\alpha$ ,  $s(h) \equiv h$  (abus de notation!) sont des opérateurs linéaires agissant dans  $V$ . Soit  $f_{\mu,A}$  un vecteur du sous-espace propre  $V_\mu$  associé au plus haut poids  $\mu$ . On aimerait montrer que l'espace  $V_\mu$  est de dimension 1. On a

$$e_\alpha f_{\mu,A} = 0 \quad (7.68)$$

pour toute racine positive car  $\mu + \alpha > \mu$  n'est pas un poids. Ceci implique

$$e_i f_{\mu, A} = 0 \quad (7.69)$$

pour toute racine simple  $\alpha_i$  ( $e_{\alpha_i} \equiv e_i$ ) et inversement, si (7.69) est vrai, (7.68) en découle car les vecteurs  $e_\alpha$  associés aux racines positives s'expriment comme commutateurs des  $e_i$ .

### Non-dégénérescence du plus haut poids

Les polynômes en les opérateurs  $e_\alpha, h, f_\alpha$  sont également des opérateurs linéaires agissant dans  $V$ . Notons  $U$  l'algèbre de ces polynômes. Soit  $v$  un vecteur non nul quelconque de la représentation. Le sous espace vectoriel  $Uv$  engendré par toutes les images de  $v$  sous les éléments de  $U$  est clairement invariant,  $a(Uv) \subset Uv \forall a \in L$ , et donc

$$Uv = V$$

puisque la représentation ne contient pas de sous-espace invariant non-trivial (irréductibilité). En utilisant les relations de commutation, on peut voir que les monômes

$$f_{i_1}^{q_1} \dots f_{i_k}^{q_k} h_1^{m_1} \dots h_r^{m_r} e_{j_1}^{p_1} \dots e_{j_m}^{p_m}$$

forment une base de  $U$  (le vérifier par récurrence).

Considérons l'action de  $U$  sur un vecteur  $f_{\mu, A} \in V_\mu$ . Les  $e_i$  annihilent  $f_{\mu, A}$ ; par conséquent seuls les monômes avec  $p_1 = p_2 = \dots = p_m = 0$ ,

$$f_{i_1}^{q_1} \dots f_{i_k}^{q_k} h_1^{m_1} \dots h_r^{m_r}$$

peuvent donner un vecteur non nul quand ils agissent sur  $f_{\mu, A}$ .

D'autre part, les  $h_i$  reproduisent  $f_{\mu, A}$  au coefficient multiplicatif  $\mu_i$  près, et les  $f_i$  font strictement descendre le poids  $\mu$ . Les seuls vecteurs dans  $Uf_{\mu, A}$  qui sont de plus haut poids  $\mu$  sont donc tous multiples de  $f_{\mu, A}$ . Comme  $Uf_{\mu, A} = V$ , il en résulte que le plus haut poids est non dégénéré (et l'espace  $V_\mu$  est de dimension 1). L'indice supplémentaire  $A$  est donc superflu pour le plus haut poids.

Il en résulte que tous les vecteurs de la représentation s'obtiennent à partir du vecteur  $f_\mu$  en agissant avec les opérateurs de "descente"  $f_i$  et ont donc la forme

$$f_{i_1}^{q_1} \dots f_{i_k}^{q_k} (f_\mu).$$

On en tire que les poids de la représentation s'obtiennent à partir du plus haut poids comme

$$\mu - \sum_{i=1}^r n_i \alpha_i \quad (7.70)$$

où les  $n_i$  sont des entiers non négatifs.

Il est donc possible de construire une représentation quelconque à partir du vecteur de plus haut poids.



On notera aussi que  $f_\mu$  et ses multiples sont les seuls vecteurs annihilés par tous les opérateurs  $e_\alpha$  avec  $\alpha > 0$ . En effet, s'il y avait un vecteur non nul  $f_\nu$  avec  $\nu < \mu$  tel que  $e_\alpha f_\nu = 0$ , alors le sous-espace invariant  $Uf_\nu$  serait un sous-espace propre non nul de  $V$ , contrairement à l'hypothèse d'irréductibilité.

### Chambre fondamentale de Weyl, poids dominant

On appelle chambre fondamentale de Weyl  $\mathcal{W}$  le domaine convexe de  $H^*$  défini par les inégalités

$$\lambda \in \mathcal{W} \subset H^* \Leftrightarrow \lambda \cdot \alpha_i \geq 0 \quad \forall \alpha_i \quad (7.71)$$

où les  $\alpha_i$  sont les racines simples. On dit qu'un poids est **dominant** s'il est dans la chambre fondamentale de Weyl.

**Théorème 7.6.** *Les poids les plus hauts sont dominants.*

*Démonstration.* En effet, si  $\mu$  est le poids le plus haut d'une représentation, alors toutes les chaînes de poids associés à la racine  $\alpha_i$  passant par  $\mu$  ne vont pas plus haut que  $\mu$ , donc ont un  $p$  nul. Ceci implique  $\mu \cdot \alpha_i \geq 0$ .  $\square$

### Coefficients de Dynkin - Poids fondamentaux

Pour le poids le plus haut  $\mu$  d'une représentation quelconque, on a

$$2 \frac{\mu \cdot \alpha_i}{\alpha_i^2} = \ell^i \quad (7.72)$$

où les  $\ell^i$  sont des entiers non négatifs, caractérisant la longueur de la chaîne de racines  $\alpha_i$  passant par  $\mu$  ( $\ell^i \equiv q^i, p^i = 0$ ). On appelle les nombres  $\ell^i$  les **coefficients de Dynkin** de la représentation, que l'on note  $(\ell^1, \ell^2, \dots, \ell^r)$ . Comme les racines simples forment une base et les coefficients de Dynkin sont les projections du poids sur les racines, toute l'information sur le poids le plus haut est équivalente aux coefficients de Dynkin.

Introduisons les vecteurs  $\mu^j \in H^*$  ( $j = 1, \dots, r$ ) tels que

$$2 \frac{\mu^j \cdot \alpha_i}{\alpha_i^2} = \delta^{ij}. \quad (7.73)$$

On a

$$\mu = \sum_{j=1}^r \ell^j \mu^j. \quad (7.74)$$

On peut montrer (nous ne le ferons pas ici en général mais le vérifierons dans un certain nombre de cas) que les vecteurs  $\mu^j$  sont

Pour  $su(2)$ , la représentation fondamentale (1) est la représentation  $D_{\frac{1}{2}}$ .

Pour  $su(3)$ , on a  $(1, 0) = \mathbf{3}$ ,  $(0, 1) = \bar{\mathbf{3}}$  et  $(1, 1) = \mathbf{8}$ . En effet, le poids le plus haut de la représentation  $\mathbf{3}$  est  $\mu^1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$ , tandis que le poids le plus haut de la représentation  $\bar{\mathbf{3}}$  est  $\mu^2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$ , et ceux-ci obéissent bien aux relations d'orthogonalité (7.73) avec les racines simples  $\alpha_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  et  $\alpha_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  de norme 1.

chacun le poids le plus haut d'une représentation irréductible de l'algèbre de Lie. On les appelle pour cette raison **poids fondamentaux** et les représentations correspondantes **représentations fondamentales**.

On appelle réseau des poids le réseau  $\mathbb{Z}\mu^i$ . Le réseau des racines  $\mathbb{Z}\alpha_i$  est un sous-réseau du réseau des poids.

*Représentations quelconques par méthodes tensorielles* Rappelons que dans le produit tensoriel de deux représentations  $s_1$  et  $s_2$  de la même algèbre de Lie  $L$ , l'opérateur  $a \in L$  est représenté par  $(s_1(a) \otimes I_2) + (I_1 \otimes s_2(a))$ . Il en résulte que si on connaît les représentations fondamentales, on peut construire la représentation irréductible de plus haut poids  $\mu$  où  $\mu = \sum_{j=1}^r \ell^j \mu^j$  ( $\ell^j$  entiers non négatifs) est un poids dominant quelconque, en prenant le produit tensoriel de  $\ell^1$  fois la représentation fondamentale  $(1, 0, 0, \dots, 0)$ , de  $\ell^2$  fois la représentation fondamentale  $(0, 1, 0, \dots, 0)$  etc et en extrayant la représentation irréductible qui contient l'unique vecteur de poids  $\mu$  (donné par le produit tensoriel des vecteurs de plus haut poids de chacune des représentations apparaissant dans le produit tensoriel). C'est ce qui a été fait en BAC<sub>3</sub> pour  $su(2)$ . Nous développerons cette méthode au prochain chapitre pour  $su(3)$ .

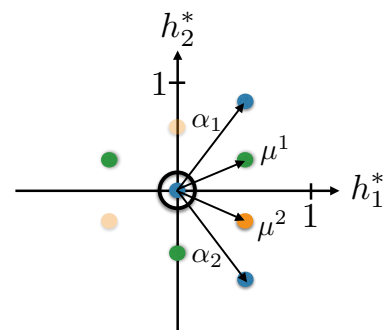


FIGURE 7.8: Les deux poids fondamentaux  $\mu^1$  et  $\mu^2$  des représentations  $\mathbf{3}$  et  $\bar{\mathbf{3}}$  de  $su(3)$  ainsi que les 2 autres poids de  $\mathbf{3}$  et les 2 autres poids de  $\bar{\mathbf{3}}$  obtenus en soustrayant les racines  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  des poids fondamentaux.

### Groupe de Weyl et poids

Soit  $s$  une représentation de l'algèbre de Lie simple compacte  $L$ . Ses poids peuvent être dégénérés, sauf le plus haut poids, noté  $\mu$ .

**Théorème 7.7.** *L'image d'un poids de  $s$  par le groupe de Weyl est un poids de  $s$ . En outre, deux poids dans la même orbite du groupe de Weyl ont la même dégénérescence.*

*Démonstration.* En effet, soit  $\nu$  un poids de  $s$  et  $\alpha$  une racine positive quelconque. Considérons la chaîne de poids

$$\nu - q\alpha, \nu - (q-1)\alpha, \dots, \nu, \dots, \nu + (p-1)\alpha, \nu + p\alpha.$$

Ces poids sont les poids d'une représentation (pas nécessairement irréductible) du  $su(2)$  associé à  $\alpha$ . On sait que les représentations de  $su(2)$  sont symétriques par rapport à l'origine (ici  $\nu + \frac{1}{2}(p-q)\alpha$ ) : les "spins selon  $z$ "  $+k$  et  $-k$  (ici  $\nu + \frac{1}{2}(p-q)\alpha + k\alpha$  et  $\nu + \frac{1}{2}(p-q)\alpha - k\alpha$ ) apparaissent avec la même multiplicité. Donc  $\nu$  et  $\nu + (p-q)\alpha$  apparaissent avec la même multiplicité. Mais  $\nu + (p-q)\alpha$  est l'image de  $\nu$  par la réflexion de Weyl  $s_\alpha$ ,

$$\nu \rightarrow s_\alpha(\nu) = \nu - 2 \frac{\nu \cdot \alpha}{\alpha^2} \alpha = \nu + (p-q)\alpha.$$

□

La chambre fondamentale de Weyl possède les propriétés importantes suivantes.

**Théorème 7.8.** *Soit  $\lambda \in H^*$  un point quelconque de  $H^*$  et  $O$  son orbite sous le groupe de Weyl. Alors  $O$  possède un poids dans la chambre fondamentale de Weyl  $\mathcal{W}$ .*

*Démonstration.* En effet, l'orbite  $O$  étant finie possède un élément  $\omega$  plus grand que tous les autres. Si  $\omega$  n'est pas dans  $\mathcal{W}$ , alors  $\omega \cdot \alpha_i < 0$  pour au moins une racine simple  $\alpha_i$ . Mais alors,  $s_i(\omega) = \omega - 2\frac{\omega \cdot \alpha_i}{\alpha_i^2} \alpha_i > \omega$  contrairement à l'hypothèse. Donc  $\omega$  est dans  $\mathcal{W}$ , ce qui montre que l'orbite  $O$  intersecte  $\mathcal{W}$ .  $\square$

En fait,  $O$  possède un et un seul point dans la chambre fondamentale de Weyl  $\mathcal{W}$  qui est donc un domaine fondamental pour l'action du groupe de Weyl dans  $H^*$  (non démontré).

### 7.10 Classification des algèbres de Lie simples compactes

Nous avons maintenant tous les outils en main pour obtenir une classification complète des algèbres de Lie compactes simples. Nous allons suivre la preuve originale de Dynkin qui consiste à classifier les systèmes de racines simples possibles. Nous avons uniquement besoin de trois propriétés :

- A Les racines simples forment une base de  $\mathbb{R}^r$
- B Si  $\alpha, \beta$  sont deux racines simples distinctes,  $\frac{2\alpha \cdot \beta}{\alpha^2} = 0, -1, -2$  ou  $-3$ .<sup>6</sup>
- C Le système de racines simples est **indécomposable**, c'est-à-dire qu'il ne peut être partitionné en deux sous-systèmes mutuellement orthogonaux.

Nous avons déjà prouvé les deux premières propriétés. Un algèbre simple ne peut avoir un système de racines décomposable. En effet, il est facile de voir que pour un système décomposable, les générateurs associés aux racines simples dans deux sous-systèmes mutuellement orthogonaux commutent ( $p$  et  $q$  sont zéro pour chaque paire) et l'ensemble des générateurs  $e_\alpha, f_\alpha$  se partitionne en deux ensembles qui commutent. Chaque ensemble accompagné de l'algèbre de Cartan forme une sous-algèbre invariante, ce qui contredit le fait que l'algèbre est simple.

Nous avons vu qu'un système de racines est uniquement caractérisé par sa matrice de Cartan qui est encodée dans un diagramme de Dynkin. En termes de diagrammes de Dynkin, B est automatique parce que le nombre de lignes entre les noeuds détermine les entiers ; C est la condition que le diagramme est connecté ce qui est immédiat

6. Rappelons que cela implique que dans le cas  $-1$  les racines forment un angle de  $120^\circ$  et ont la même longueur, dans le cas  $-2$ , elles forment un angle de  $135^\circ$  et une est plus courte par un facteur  $\sqrt{2}$  et dans le cas  $-3$  elles forment un angle de  $150^\circ$  et une est plus courte par un facteur  $\sqrt{3}$ .

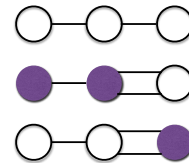
à implémenter ;  $A$  est équivalent à la condition que le diagramme contienne  $r$  noeuds et que les racines soient linéairement dépendantes. Cette dernière condition est non-triviale et doit être étudiée plus en détail.

Faisons maintenant de la géométrie Euclidienne à  $r$  dimensions.

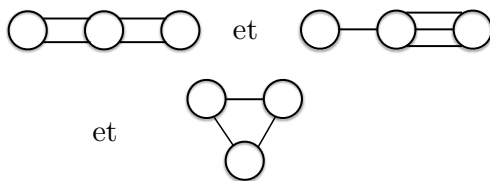
**Lemme 7.9.** *Les seuls systèmes de 3 racines simples sont*



Ici, on ignore les longueur relatives des racines. En tenant compte des longueurs, on a trois systèmes possibles de 3 racines simples :



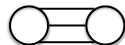
C'est une conséquence directe du fait que la somme des angles entre trois vecteurs linéairement indépendants est moins de  $360^\circ$ . Les seuls angles possibles sont  $90^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $135^\circ$  et  $150^\circ$  et un seul angle de  $90^\circ$  est permis par la condition  $C$  d'indécomposabilité. Il y a trois systèmes importants qui obéissent à  $B$  et  $C$  mais n'obéissent pas à  $A$  :



Ils n'obéissent pas à  $A$  parce que la somme des angles est de  $360^\circ$  exactement et donc les 3 vecteurs sont coplanaires et donc linéairement dépendants.

En fait, le lemme 7.9 est une contrainte très forte car tout sous-ensemble connecté de noeuds d'un diagramme de Dynkin est lui-même un diagramme de Dynkin comme on s'en convainc aisément (les propriétés  $A, B, C$  sont vérifiées). Donc tout ensemble connecté de trois noeuds doit avoir une des deux formes énoncées dans le lemme 7.9.

Un corollaire très simple est qu'aucune ligne triple ne peut apparaître dans un système de 3 racines simples ou plus. Donc, le seul système de racines simples qui contient une ligne triple est



Ce diagramme correspond à l'algèbre  $G_2$ .

**Lemme 7.10.** *Si un diagramme de Dynkin contient deux noeuds connectés par une ligne simple, le diagramme obtenu par l'effacement de la ligne et la fusion des deux noeuds à leur extrémité en un seul noeud est encore un diagramme de Dynkin.*

*Démonstration.* Soit  $\alpha, \beta$  deux racines simples connectées par une ligne simple (et donc de même longueur) et  $\Gamma$  l'ensemble des autres

racines simples. Par le lemme 7.9,  $\Gamma$  ne contient pas de racine connectée à  $\alpha$  et  $\beta$  en même temps. Soit  $\gamma \in \Gamma$  une racine connectée à  $\alpha$ , on a alors  $\gamma \cdot \beta = 0$  et donc  $\gamma \cdot (\alpha + \beta) = \gamma \cdot \alpha$ . De plus la longueur de  $\alpha$  et  $\alpha + \beta$  est la même (car l'angle entre  $\alpha$  et  $\beta$  est de  $120^\circ$  et donc  $\alpha, \beta, \alpha + \beta$  forment les arêtes d'un triangle équilatéral). Le même raisonnement peut être établi pour  $\gamma \in \Gamma$  racine connectée à  $\beta$ .

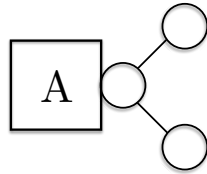
Considérons le diagramme dont les racines sont  $\alpha + \beta$  et  $\Gamma$ . C'est le diagramme obtenu par l'effacement de la ligne entre  $\alpha$  et  $\beta$  et la fusion des deux noeuds. Il est alors immédiat qu'il obéit aux trois conditions A, B et C. □

Une conséquence des lemmes 7.9 et 7.10 est qu'un diagramme de Dynkin a une ligne double au plus. En effet, un diagramme de Dynkin ne peut pas avoir deux lignes doubles en affilée et si elles sont séparées par des lignes simples, on peut les contracter par le lemme 7.10 pour arriver à deux lignes doubles en affilée.

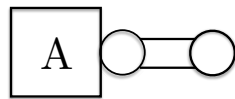
Cette conséquence justifie à posteriori la notation d'indiquer les racines courtes par un cercle rempli. Il n'y a au maximum que deux longueurs différentes de racines dans un diagramme de Dynkin.

Une autre conséquence est qu'il ne peut y avoir de boucle fermée dans un diagramme de Dynkin. Sinon après contractions on arrive aussi à une contradiction avec le lemme 7.9.

**Lemme 7.11.** *Si la configuration*

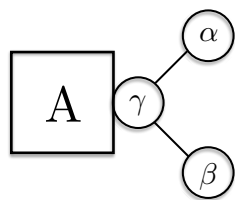


*est un diagramme de Dynkin pour un sous-diagramme de Dynkin donné A alors*



*est aussi un diagramme de Dynkin.*

*Démonstration.* Choisissons de nommer les racines simples comme :



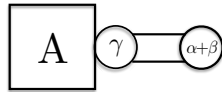
On a que  $\alpha \cdot \beta = 0$  et

$$\frac{2\alpha \cdot \gamma}{\alpha^2} = \frac{2\alpha \cdot \gamma}{\gamma^2} = -1 = \frac{2\beta \cdot \gamma}{\beta^2} = \frac{2\beta \cdot \gamma}{\gamma^2}. \tag{7.75}$$

On en déduit  $(\alpha + \beta)^2 = (\alpha)^2 + (\beta)^2 = 2(\gamma)^2$  et donc

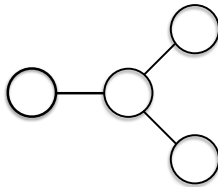
$$\frac{2\gamma \cdot (\alpha + \beta)}{\gamma^2} = -2, \quad \frac{2\gamma \cdot (\alpha + \beta)}{(\alpha + \beta)^2} = -1. \quad (7.76)$$

Donc le diagramme suivant est un diagramme de Dynkin :

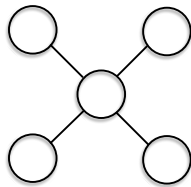


□

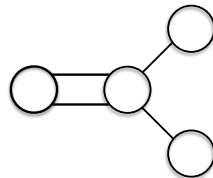
Un corollaire est que les seules embranchements d'un diagramme de Dynkin doivent avoir la forme de trois lignes simples venant d'un noeud central comme



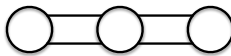
parce que d'autres structures d'embranchement comme



ou



pourraient se réduire par contraction à

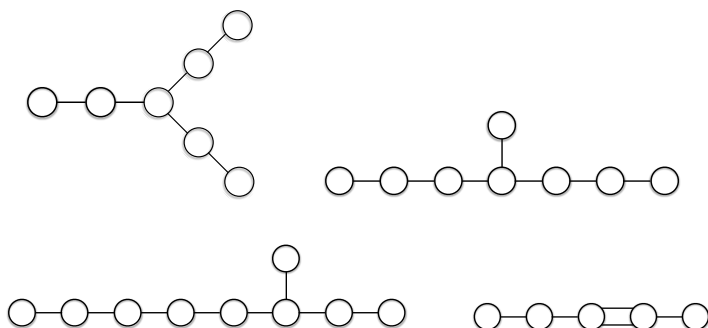


ce qui n'est pas autorisé par le lemme 7.9.

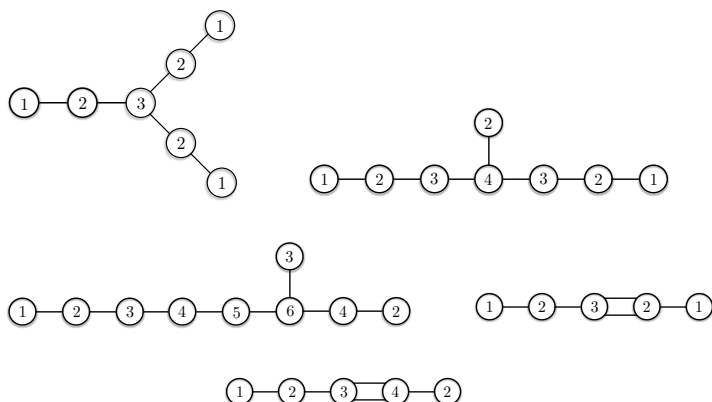
Un autre corollaire est qu'aucun diagramme de Dynkin ne contient deux embranchements distinctes. Sinon, on pourrait de nouveau le contracter en diagrammes non-autorisés.

Il y a pas d'autres théorèmes généraux utiles pour la classification. Il reste maintenant à étudier des cas particuliers qui sont reliés à l'existence des algèbres de Lie exceptionnelles.

**Lemme 7.12.** *Les diagrammes suivants ne sont pas des diagrammes de Dynkin et donc aucun diagramme de Dynkin ne peut les contenir en tant que sous-diagrammes :*



*Démonstration.* Ces quatre diagrammes contiennent une combinaison linéaire des racines simples qui est nulle et donc les racines ne sont pas linéairement indépendantes (condition *A* non-vérifiée). Il suffit de trouver une combinaison linéaire des racines  $\sum_j c^j \alpha_j$  telle que  $(\sum_j c^j \alpha_j)^2 = 0$ . Les valeurs de  $c^j$  qui donnent un vecteur nul sont indiquées dans les noeuds des diagrammes suivants :



Les deux derniers graphiques correspondent aux deux choix de longueur des racines. Si les racines simples sont plus longues à droite de la double ligne, on utilise le quatrième graphique et si les racines simples sont plus courtes à droite de la double ligne, on utilise le dernier graphique. Nous ne ferons pas cette preuve purement géométrique explicitement ici.

□

Il est alors possible de complètement classifier les diagrammes de Dynkin possibles avec un peu de logique. Le résultat est la liste complète des algèbres simples compactes :

$$A_n = su(n + 1) \quad (n \geq 1) \quad \circ \cdots \circ - \circ - \circ - \circ - \circ$$

$$B_n = so(2n + 1) \quad (n \geq 2) \quad \circ \cdots \circ - \circ - \circ - \circ = \bullet$$

$$C_n = sp(2n) \quad (n \geq 3) \quad \bullet \cdots \bullet - \bullet - \bullet - \bullet = \circ$$

$$D_n = so(2n) \quad (n \geq 4) \quad \circ \cdots \circ - \circ - \circ - \circ \begin{matrix} \circ \\ \circ \end{matrix}$$

$$G_2 \quad \circ = \bullet$$

$$F_4 \quad \circ - \circ = \bullet - \bullet$$

$$E_6 \quad \begin{matrix} \circ \\ | \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \end{matrix}$$

$$E_7 \quad \begin{matrix} \circ \\ | \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \end{matrix}$$

$$E_8 \quad \begin{matrix} \circ \\ | \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \end{matrix}$$

Les quatre familles  $A_n, B_n, C_n, D_n$  sont appelées les algèbres compactes classiques (et leurs groupes correspondants, les groupes compactes classiques). Les algèbres  $G_2, F_4, E_6, E_7, E_8$  sont les 5 algèbres et groupes exceptionnel(le)s. Remarquons que  $A_1 = B_1 = C_1$  sont égales à  $su(2)$  et  $B_2 = C_2$ . On définit donc les familles  $B_n$  pour  $n \geq 2$  et  $C_n$  pour  $n \geq 3$ . On a  $D_3 = A_3$  donc on définit  $D_n$  avec  $n \geq 4$ . Formellement, on peut écrire  $D_2$  mais ce n'est pas un diagramme connecté donc l'algèbre n'est pas simple. En fait elle est semi-simple, il n'agit de  $su(2) \otimes su(2)$ . Après avoir reconnu  $D_2 = so(4)$ , on trouve l'isomorphisme  $so(4) \simeq su(2) \oplus su(2)$ <sup>7</sup>.

Finalement la liste ci-dessus décrit toutes les algèbres de Lie compactes simples indépendantes !

Après reconstruction de l'algèbre, on peut identifier  $A_n$  avec  $su(n + 1)$ ,  $B_n$  avec  $so(2n + 1)$ ,  $D_n$  avec  $so(2n)$  et  $C_n$  avec l'algèbre des transformations dites symplectiques  $sp(2n)$ .

Les noeuds noirs correspondent aux racines simples plus courtes que les racines simples associées aux noeuds blancs.

7. Si on complexifie l'algèbre on a  $so(4) \simeq so(3, 1)$  et il a été vu en BAC3 que  $so(3, 1) \simeq sl(2, \mathbb{C})$ . En fait on a aussi  $sl(2, \mathbb{C}) \simeq sl(2, \mathbb{R}) \oplus sl(2, \mathbb{R})$  et pour une algèbre complexifiée  $sl(2, \mathbb{R}) \simeq so(2, 1) \simeq so(3)$ . Ici, l'isomorphisme  $so(4) \simeq su(2) \oplus su(2)$  est un isomorphisme entre algèbres dans  $\mathbb{R}$  ce qui est plus contraignant.



# 8

## Représentations de $su(3)$

Nous avons vu que toute représentation irréductible de  $su(3)$  est labellée par ses deux coefficients de Dynkin  $(m, n)$  qui sont des entiers non-négatifs. Nous avons identifié les représentations irréductibles fondamentales  $(1, 0)$  et  $(0, 1)$  qui sont respectivement les représentations  $\mathbf{3}$  et  $\bar{\mathbf{3}}$ . Nous avons aussi vu que  $(1, 0)^* = (0, 1)$  et que la représentation adjointe est  $\mathbf{8} = (1, 1)$ .

Avant de continuer, rassemblons toutes les formules clés :

$$[h_1, e_1] = \frac{1}{2}e_1, \quad [h_2, e_1] = \frac{\sqrt{3}}{2}e_1 \quad (8.1)$$

$$[h_1, e_2] = \frac{1}{2}e_2, \quad [h_2, e_2] = -\frac{\sqrt{3}}{2}e_2 \quad (8.2)$$

$$[e_1, e_1^\dagger] = \frac{1}{2}h_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}h_2, \quad [e_1, e_2^\dagger] = 0 \quad (8.3)$$

$$[e_2, e_2^\dagger] = \frac{1}{2}h_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}h_2, \quad [e_2, e_1^\dagger] = 0 \quad (8.4)$$

$$\alpha_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \alpha_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad (8.5)$$

$$\alpha_1 \cdot \alpha_1 = 1 = \alpha_2 \cdot \alpha_2, \quad \alpha_1 \cdot \alpha_2 = -\frac{1}{2} \quad (8.6)$$

$$\mu^1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right), \quad \mu^2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}\right) \quad (8.7)$$

### 8.1 Les représentations $(m, n)$

On peut trouver la représentation irréductible  $(m, n)$  de plus haut poids  $m\mu^1 + n\mu^2$  en décomposant le produit tensoriel de  $m$  fois la  $\mathbf{3}$  par  $n$  fois la  $\bar{\mathbf{3}}$ , ou en partant du vecteur de plus haut poids associé au poids  $m\mu^1 + n\mu^2$  et en considérant successivement les chaînes de racines appropriées. Nous commencerons par illustrer la méthode constructive à partir du plus haut poids. Dans la section suivante nous considérerons les méthodes tensorielles.

*Représentation  $(m, n)^*$* 

On notera que le poids le plus bas de la représentation  $(m, n)$  est  $-m\mu^2 - n\mu^1$  car le poids le plus bas de la représentation  $\mathfrak{3}$  (respectivement  $\bar{\mathfrak{3}}$ ) est  $-\mu^2$  (respectivement  $-\mu^1$ ). Comme les poids de la représentation complexe conjuguée  $(m, n)^*$  sont moins les poids de la représentation  $(m, n)$ , on en déduit que

$$(m, n)^* = (n, m). \quad (8.8)$$

Il en résulte que seules les représentations  $(m, m)$  sont réelles.

*La représentation  $(2, 0) = \mathfrak{6}$* 

Pour illustrer l'utilisation des chaînes de racines dans la construction des représentations  $(m, n)$ , considérons la représentation  $(2, 0)$  de plus haut poids  $2\mu^1 = \left(1 \quad \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ .

On part du vecteur de plus haut poids  $f_{2\mu^1} \equiv |2\mu^1\rangle$  qui est annihilé par  $e_1$  et  $e_2$  (et donc aussi  $[e_1, e_2]$ ),

$$e_1|2\mu^1\rangle = 0, \quad e_2|2\mu^1\rangle = 0.$$

On normalise  $\langle 2\mu^1|2\mu^1\rangle$  à 1,

$$\langle 2\mu^1|2\mu^1\rangle = 1.$$

En outre, par définition des poids,

$$h_1|2\mu^1\rangle = |2\mu^1\rangle, \quad h_2|2\mu^1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{3}|2\mu^1\rangle.$$

La chaîne de racines  $\alpha_1$  passant par  $|2\mu^1\rangle$  a  $p = 0$  et  $q = 2(2\mu^1 \cdot \alpha_1) = 2$ , tandis que la chaîne de racines  $\alpha_2$  passant par  $|2\mu^1\rangle$  a  $p = 0$  et  $q = 0$ . Donc  $e_2^\dagger$  annihile aussi  $|2\mu^1\rangle$ , mais  $e_1^\dagger|2\mu^1\rangle \neq 0$ ,  $(e_1^\dagger)^2|2\mu^1\rangle \neq 0$  et  $(e_1^\dagger)^3|2\mu^1\rangle = 0$ . Comme c'est une chaîne de spin 1, la normalisation est donnée par (voir tables plus haut) <sup>1</sup>

$$e_2^\dagger|2\mu^1\rangle = 0, \quad e_1^\dagger|2\mu^1\rangle = |2\mu^1 - \alpha_1\rangle, \quad (8.9)$$

$$(e_1^\dagger)^2|2\mu^1\rangle = |2\mu^1 - 2\alpha_1\rangle, \quad (e_1^\dagger)^3|2\mu^1\rangle = 0. \quad (8.10)$$

Examinons à présent la chaîne de racines  $\alpha_2$  passant par  $|2\mu^1 - \alpha_1\rangle$ . On a  $p = 0$  car il n'y a pas de poids  $2\mu^1 - \alpha_1 + \alpha_2$  correspondant à l'état inexistant  $e_2 e_1^\dagger|2\mu^1\rangle = e_1^\dagger e_2|2\mu^1\rangle = 0$ . De

$$2 \frac{(2\mu^1 - \alpha_1) \cdot \alpha_2}{\alpha_2^2} = 1$$

On rappelle  $q_j - p_j = \frac{2\phi \cdot \alpha_j}{\alpha_j \cdot \alpha_j}$ .

1. On peut vérifier que ces états sont normalisés correctement car

$$\begin{aligned} \langle 2\mu^1|e_1 e_1^\dagger|2\mu^1\rangle &= \langle 2\mu^1|[e_1, e_1^\dagger]|2\mu^1\rangle \\ &= \langle 2\mu^1|\frac{1}{2}h_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}h_2|2\mu^1\rangle = \langle 2\mu^1|2\mu^1\rangle = 1 \end{aligned}$$

et

$$e_1|2\mu^1 - \alpha_1\rangle = e_1 e_1^\dagger|2\mu^1\rangle = [e_1, e_1^\dagger]|2\mu^1\rangle = |2\mu^1\rangle$$

de sorte que

$$\langle 2\mu^1 - \alpha_1|e_1 e_1^\dagger|2\mu^1 - \alpha_1\rangle = \langle 2\mu^1 - \alpha_1|[e_1, e_1^\dagger]|2\mu^1 - \alpha_1\rangle + 1 = 1$$

car  $(\frac{1}{2}h_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}h_2)|2\mu^1 - \alpha_1\rangle = 0$  (l'état  $|2\mu^1 - \alpha_1\rangle$  possède un spin zéro selon  $z$  pour le  $su(2)$  associé à  $\alpha_1$ ). De la même manière, on a aussi

$$\begin{aligned} e_1|2\mu^1 - 2\alpha_1\rangle &= e_1 e_1^\dagger|2\mu^1 - \alpha_1\rangle \\ &= [e_1, e_1^\dagger]|2\mu^1 - \alpha_1\rangle + e_1^\dagger e_1|2\mu^1 - \alpha_1\rangle = |2\mu^1 - \alpha_1\rangle \end{aligned}$$

et

$$\left(\frac{1}{2}h_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}h_2\right)|2\mu^1 - 2\alpha_1\rangle = -|2\mu^1 - 2\alpha_1\rangle.$$

on tire que  $q = 1$  de telle sorte que l'état  $e_2^\dagger |2\mu^1 - \alpha_1\rangle$  existe et forme avec l'état  $|2\mu^1 - \alpha_1\rangle$  une représentation de spin  $1/2$  du  $su(2)$  associé à  $\alpha_2$ . La bonne normalisation est

$$|2\mu^1 - \alpha_1 - \alpha_2\rangle = \sqrt{2} e_2^\dagger |2\mu^1 - \alpha_1\rangle.$$

On a aussi

$$e_2 |2\mu^1 - \alpha_1 - \alpha_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |2\mu^1 - \alpha_1\rangle.$$

Passons à la chaîne de racines  $\alpha_2$  passant par  $|2\mu^1 - 2\alpha_1\rangle$ . On a à nouveau  $p = 0$  car il n'y a pas de poids  $2\mu^1 - 2\alpha_1 + \alpha_2$  correspondant à l'état inexistant  $e_2 e_1^\dagger e_1^\dagger |2\mu^1\rangle = (e_1^\dagger)^2 e_2 |2\mu^1\rangle = 0$ . De

$$2 \frac{(2\mu^1 - 2\alpha_1) \cdot \alpha_2}{\alpha_2^2} = 2$$

on tire que  $q = 2$  de telle sorte que les états  $e_2^\dagger |2\mu^1 - 2\alpha_1\rangle$  et  $(e_2^\dagger)^2 |2\mu^1 - 2\alpha_1\rangle$  existent et forment avec l'état  $|2\mu^1 - 2\alpha_1\rangle$  une représentation de spin  $1$  du  $su(2)$  associé à  $\alpha_2$ . On a

$$|2\mu^1 - 2\alpha_1 - \alpha_2\rangle = e_2^\dagger |2\mu^1 - 2\alpha_1\rangle, \quad |2\mu^1 - 2\alpha_1 - 2\alpha_2\rangle = e_2^\dagger |2\mu^1 - 2\alpha_1 - \alpha_2\rangle.$$

Il convient à présent d'examiner si de nouveaux états ne peuvent être créés en considérant les chaînes de racines  $\alpha_1$  passant par les nouveaux états  $|2\mu^1 - \alpha_1 - \alpha_2\rangle$ ,  $|2\mu^1 - 2\alpha_1 - \alpha_2\rangle$  et  $|2\mu^1 - 2\alpha_1 - 2\alpha_2\rangle$ . On vérifie aisément que ce n'est pas le cas. Considérons en effet la chaîne de racines  $\alpha_1$  passant par  $|2\mu^1 - \alpha_1 - \alpha_2\rangle \sim e_2^\dagger e_1^\dagger |2\mu^1\rangle$ . On a  $p = 0$  car  $e_1 e_2^\dagger e_1^\dagger |2\mu^1\rangle \sim e_2^\dagger |2\mu^1\rangle = 0$ . D'autre part,  $q = 1$  car  $2(2\mu^1 - \alpha_1 - \alpha_2) \cdot \alpha_1 = 1$ . Donc les états  $|2\mu^1 - \alpha_1 - \alpha_2\rangle$  et  $e_1^\dagger |2\mu^1 - \alpha_1 - \alpha_2\rangle$  forment une représentation de spin  $1/2$  du  $su(2)$  associé à la racine  $\alpha_1$ . En fait, l'état

$$|2\mu^1 - 2\alpha_1 - \alpha_2\rangle' = \sqrt{2} e_1^\dagger |2\mu^1 - \alpha_1 - \alpha_2\rangle$$

coïncide avec l'état  $|2\mu^1 - 2\alpha_1 - \alpha_2\rangle$  déjà trouvé : le poids  $2\mu^1 - 2\alpha_1 - \alpha_2$  n'est pas dégénéré. En effet, un calcul direct montre que la matrice des produits scalaires des deux états en question,

$$|2\mu^1 - 2\alpha_1 - \alpha_2\rangle = e_2^\dagger e_1^\dagger |2\mu^1\rangle, \quad |2\mu^1 - 2\alpha_1 - \alpha_2\rangle' = 2e_1^\dagger e_2^\dagger |2\mu^1\rangle$$

est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dès lors, ces deux vecteurs sont non seulement linéairement indépendants, mais aussi égaux. Le fait que le poids  $2\mu^1 - 2\alpha_1 - \alpha_2$  est non dégénéré est une conséquence du fait qu'il est dans la même orbite de Weyl que le poids non-dégénéré  $|2\mu^1 - \alpha_1\rangle$ . La chaîne

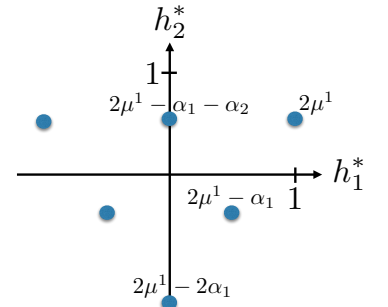


FIGURE 8.1: Tous les poids de la représentation 6 dans la base de Cartan.

de racines  $\alpha_1$  passant par  $|2\mu^1 - \alpha_1 - \alpha_2\rangle \sim e_2^\dagger e_1^\dagger |2\mu^1\rangle$  ne donne donc rien de neuf. Reste à examiner la chaîne de racines  $\alpha_1$  passant par  $|2\mu^1 - 2\alpha_1 - 2\alpha_2\rangle$ . On a  $p = 0$  car  $e_1 |2\mu^1 - 2\alpha_1 - 2\alpha_2\rangle \sim e_1 e_2^\dagger e_2^\dagger e_1^\dagger |2\mu\rangle \sim e_2^\dagger e_2^\dagger e_1 e_1^\dagger |2\mu\rangle \sim e_2^\dagger e_2^\dagger e_1^\dagger |2\mu\rangle = 0$  et  $q = 0$  car

$$q = 2(2\mu^1 - 2\alpha_1 - 2\alpha_2) \cdot \alpha_1 = 0$$

et donc aucun état nouveau n'apparaît ici non plus.

On a trouvé tous les états de la représentation  $(2, 0)$ , qui est six-dimensionnelle et également notée **6**.

La représentation complexe conjuguée  $(0, 2) \equiv \bar{\mathbf{6}}$  a pour poids (non dégénérés) :

$$\begin{aligned} 2\mu^2, \quad 2\mu^2 - \alpha_2, \quad 2\mu^2 - 2\alpha_2, \quad 2\mu^2 - \alpha_1 - \alpha_2, \\ 2\mu^2 - \alpha_1 - 2\alpha_2, \quad 2\mu^2 - 2\alpha_1 - 2\alpha_2. \end{aligned}$$

### La représentation **10**

La représentation  $(3, 0)$  est de dimension 10 (voir plus bas) et est donc aussi notée **10**. Le poids le plus haut est  $3\mu^1$ . L'état correspondant  $|3\mu^1\rangle$  est annihilé par  $e_1$  et  $e_2$ . Il est aussi annihilé par  $e_2^\dagger$  tandis que  $e_1^\dagger, (e_1^\dagger)^2, (e_1^\dagger)^3$  produisent des états non nuls de poids respectifs  $3\mu^1 - \alpha_1, 3\mu^1 - 2\alpha_1$  et  $3\mu^1 - 3\alpha_1$ . Les autres poids de la représentation sont  $3\mu^1 - \alpha_1 - \alpha_2, 3\mu^1 - 2\alpha_1 - \alpha_2, 3\mu^1 - 2\alpha_1 - 2\alpha_2, 3\mu^1 - 3\alpha_1 - \alpha_2, 3\mu^1 - 3\alpha_1 - 2\alpha_2, 3\mu^1 - 3\alpha_1 - 3\alpha_2$  et ils sont tous non dégénérés (exercice).

## 8.2 Méthodes tensorielles

### Produit tensoriel

La méthode suivie ci-dessus pour construire les représentations de  $su(3)$  à partir du vecteur de plus haut poids est très explicite mais aussi très lourde. Les méthodes tensorielles que nous allons développer sont beaucoup plus simples.

Un tenseur de type  $\binom{m}{n}$  est un objet  $v$  à  $3^{m+n}$  composantes  $v_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m}$  ( $i_k, j_k = 1, 2, 3$ ) qui se transforme comme suit sous le groupe  $SU(3)$ ,

$$v \rightarrow v', \quad v_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m} = U_{k_1}^{i_1} \dots U_{k_m}^{i_m} v_{\ell_1 \dots \ell_n}^{k_1 \dots k_m} \left( U^{-1} \right)_{j_1}^{\ell_1} \dots \left( U^{-1} \right)_{j_n}^{\ell_n} \quad (8.11)$$

où  $U \in SU(3)$ . Pour les transformation de l'algèbre  $u \in su(3)$ ,  $U = I + iu$ ,

$$v \rightarrow v' = v + i\delta v, \quad \delta v_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m} = \sum_{p=1}^m u_{k_p}^{i_p} v_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots k_p \dots i_m} - \sum_{q=1}^n v_{j_1 \dots \ell_q \dots j_n}^{i_1 \dots i_m} u_{j_q}^{\ell_q} \quad (8.12)$$

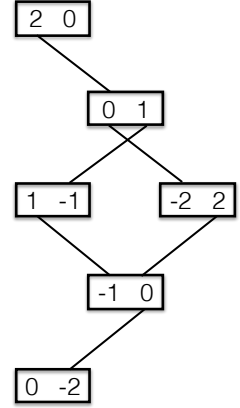


FIGURE 8.2: Tous les poids de la représentation **6**. Chaque boîte est un poids labellé par ses valeurs  $q_{\alpha_1} - p_{\alpha_1}$  et  $q_{\alpha_2} - p_{\alpha_2}$ . Le poids le plus haut est en haut du graphique ( $q_{\alpha_1} = 2, p_{\alpha_1} = q_{\alpha_2} = p_{\alpha_2} = 0$ ). Cette notation rend manifeste les représentations des deux  $su(2)$  engendrés par les deux racines simples qui sont contenues dans **6**. Sous le  $su(2)_{\alpha_1}$ , la représentation **6** de  $su(3)$  se décompose comme  $\mathbf{3} \oplus \mathbf{2} \oplus \mathbf{1} = D_1 \oplus D_{\frac{1}{2}} \oplus D_0$  de  $su(2)_{\alpha_1}$ . Il en va de même pour  $su(2)_{\alpha_2}$ .

Un tenseur de type  $\binom{1}{0}$  est un vecteur et se transforme selon la représentation  $\mathbf{3}$ ,

$$v' = Uv, \quad \delta v = uv.$$

Un tenseur de type  $\binom{0}{1}$  est un covecteur et se transforme selon la représentation  $\bar{\mathbf{3}}$  (car  $(U^{-1})^t = U^*$ ),

$$v' = vU^{-1} = vU^\dagger, \quad \delta v = -vu.$$

Un tenseur de type  $\binom{m}{n}$  se transforme donc selon

$$\underbrace{\mathbf{3} \otimes \cdots \otimes \mathbf{3}}_{m \text{ fois}} \otimes \underbrace{\bar{\mathbf{3}} \otimes \cdots \otimes \bar{\mathbf{3}}}_{n \text{ fois}}.$$

En particulier, un tenseur de type  $\binom{1}{1}$  se transforme comme

$$v' = UvU^\dagger, \quad \delta v = uv - vu = [u, v].$$

On notera qu'un tenseur symétrique (antisymétrique) en des indices d'un même type garde cette propriété sous les transformations de  $SU(3)$ .

Attention qu'un tenseur de type  $\binom{1}{1}$  ne forme pas l'espace de la représentation adjointe car il est réductible (en effet, la matrice identité est un sous-espace invariant). Comme nous allons le voir, il nous faudra d'abord prendre un sous-espace irréductible.

*Produit scalaire hermitien* Soient  $u$  et  $v$  deux tenseurs du même type  $\binom{m}{n}$ . Le tenseur  $\bar{u}$  de composantes

$$\bar{u}^{j_1 \cdots j_n}_{i_1 \cdots i_m} = \left( u^{i_1 \cdots i_m}_{j_1 \cdots j_n} \right)^*$$

est un tenseur de type  $\binom{n}{m}$  et le produit scalaire hermitien

$$(u, v) = \frac{1}{\lambda} \bar{u}^{j_1 \cdots j_n}_{i_1 \cdots i_m} v^{i_1 \cdots i_m}_{j_1 \cdots j_n} \quad (8.13)$$

où  $\lambda > 0$  est donc préservé par les transformations de  $SU(3)$  qui agit ainsi unitairement dans l'espace des tenseurs de type  $\binom{m}{n}$  (quels que soient  $m$  et  $n$ ).

### Tenseurs invariants

Il y a trois tenseurs invariants indépendants pour  $SU(3)$  :  $\delta^i_j$  (type  $\binom{1}{1}$ ) qui est invariant car  $[u, I] = 0 \quad \forall u$  ;  $\epsilon^{ijk}$  (type  $\binom{3}{0}$ ) et  $\epsilon_{ijk}$  (type  $\binom{0}{3}$ ). Ces deux derniers tenseurs sont invariants car  $U$  est de déterminant unité ( $u$  de trace nulle). Comme les  $\epsilon$  sont complètement antisymétriques, il suffit de vérifier  $\delta \epsilon^{123} = 0$  et  $\delta \epsilon_{123} = 0$ . Faisons-le explicitement pour  $\delta \epsilon^{123}$ ,

$$\delta \epsilon^{123} = u^1_i \epsilon^{i23} + u^2_i \epsilon^{i13} + u^3_i \epsilon^{i12} = u^1_1 + u^2_2 + u^3_3 = 0.$$

Il en résulte en particulier que le produit tensoriel antisymétrique de la  $\mathbf{3}$  avec la  $\mathbf{3}$  est équivalent à la  $\bar{\mathbf{3}}$  (à trois dimensions, un tenseur antisymétrique à 2 indices se transforme comme un covecteur,  $A^{ij} = \epsilon^{ijk} \theta_k$ ).

*Représentations tensorielles irréductibles*

*Vecteurs de plus haut poids de la 3 et de la  $\bar{3}$*  Vu les définitions (7.31), les générateurs  $e_a$  ( $a = 1, 2, 3$ ) associés aux racines positives sont représentés (à un facteur conventionnel  $\sqrt{2}$  près)

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs  $w$  de plus haut poids de la représentation  $\mathbf{3}$ , annihilés par  $e_a$ ,

$$e_a w = 0$$

sont les multiples du vecteur

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

c'-à-d. les vecteurs ne possédant que la composante 1 différente de 0,  $w^2 = w^3 = 0$ . Les (co)vecteurs  $\theta$  de plus haut poids de la représentation  $\bar{\mathbf{3}}$ , annihilés par  $e_a$  agissant à droite,

$$\theta e_a = 0$$

sont les multiples du covecteur

$$(0 \quad 1 \quad 0),$$

c'-à-d. les covecteurs ne possédant que la composante 2 différente de 0,  $\theta_1 = \theta_3 = 0$ . On a bien

$$h w = \mu^1(h) w$$

et

$$-\theta h = \mu^2(h) \theta.$$

*Tenseurs irréductibles* L'espace vectoriel des tenseurs d'un type  $\binom{m}{n}$  donné n'est pas irréductible. Pour obtenir des sous-espaces irréductibles, il faut imposer des conditions de symétrie et de trace.

**Théorème 8.1.** *Le sous-espace invariant  $(m, n)$  des tenseurs de type  $\binom{m}{n}$  complètement symétriques en leurs indices supérieurs, complètement symétriques en leurs indices inférieurs et de trace nulle,*

$$v_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m} = v_{j_1 \dots j_n}^{(i_1 \dots i_m)} = v_{(j_1 \dots j_n)}^{i_1 \dots i_m}, \quad v_{i_1 j_2 \dots j_n}^{i_1 i_2 \dots i_m} = 0$$

est l'espace de la représentation irréductible de coefficients de Dynkin  $(m, n)$ .

On rappelle que les générateurs de Cartan de  $su(3)$  sont dans la base de Gell-Mann donnés par

$$h_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$h_2 = \frac{\sqrt{3}}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

*Démonstration.* On va montrer qu'il existe un et un seul vecteur de plus haut poids dans cet espace (à un multiple près). Soient  $v_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m}$  les composantes d'un tenseur de type  $\binom{m}{n}$  de plus haut poids obéissant aux conditions de symétrie et de trace. Montrons d'abord que les composantes avec un indice (1, 2 ou 3) répété en haut et en bas sont nulles,

$$v_{1j_2 \dots j_n}^{1i_2 \dots i_m} = v_{2j_2 \dots j_n}^{2i_2 \dots i_m} = v_{3j_2 \dots j_n}^{3i_2 \dots i_m} = 0.$$

A cet effet, considérons  $\delta_2 v_{2j_2 \dots j_n}^{3i_2 \dots i_m}$  sous  $e_2$ . On obtient

$$\delta_2 v_{2j_2 \dots j_n}^{3i_2 \dots i_m} = m_3 v_{2j_2 \dots j_n}^{2i_2 \dots i_m} - n_2 v_{3j_2 \dots j_n}^{3i_2 \dots i_m} = 0$$

où  $m_3 \geq 1$  et  $n_2 \geq 1$  sont respectivement les nombres d'indices supérieurs 3 et d'indices inférieurs 2 dans  $v_{2j_2 \dots j_n}^{3i_2 \dots i_m}$ . De même, sous  $e_3$ ,

$$\delta_3 v_{2j_2 \dots j_n}^{1i_2 \dots i_m} = m_1 v_{2j_2 \dots j_n}^{2i_2 \dots i_m} - n_2 v_{1j_2 \dots j_n}^{1i_2 \dots i_m} = 0.$$

avec  $m_1 \geq 1$ ,  $n_2 \geq 1$ . Si on ajoute la somme de ces deux équations à  $n_2$  fois la condition de trace

$$v_{1j_2 \dots j_n}^{1i_2 \dots i_m} + v_{2j_2 \dots j_n}^{2i_2 \dots i_m} + v_{3j_2 \dots j_n}^{3i_2 \dots i_m} = 0,$$

on arrive directement à  $v_{2j_2 \dots j_n}^{2i_2 \dots i_m} = 0$  ce qui implique en réutilisant les équations au résultat annoncé.

Montrons à présent que tout tenseur de plus haut poids ne peut avoir de composante non nulle lorsque un (ou plus) des indices  $i_k$  ou  $j_k$  est égal à 3. On a en effet, si l'indice 3 apparaît comme indice supérieur (et donc pas en position inférieure),

$$\delta_1 v_{j_1 j_2 \dots j_n}^{1i_2 \dots i_m} = m_1 v_{j_1 j_2 \dots j_n}^{3i_2 \dots i_m} = 0.$$

De même,

$$\delta_2 v_{2j_2 \dots j_n}^{i_1 i_2 \dots i_m} = -n_2 v_{3j_2 \dots j_n}^{i_1 i_2 \dots i_m} = 0.$$

On montre de la même manière que l'indice 2 ne peut apparaître en position supérieure et que l'indice 1 ne peut apparaître en position inférieure, ce qui montre que la seule composante non nulle d'un tenseur de plus haut poids est

$$v_{22 \dots 22}^{11 \dots 11}.$$

Le sous-vectorel des tenseurs de plus haut poids est donc de dimension un. En outre, on vérifie aisément que le poids correspondant est

$$\mu = m\mu^1 + n\mu^2$$

(le nombre de 1 est  $m$ , le nombre de 2 est  $n$ ). Ceci achève la démonstration du théorème.  $\square$

On trouve en particulier que la représentation **6** est donnée par les tenseurs  $\binom{2}{0}$  symétriques, qui est bien à 6 dimensions, tandis que la **8** est donnée par les tenseurs mixtes de type  $\binom{1}{1}$  de trace nulle.

*Dimensions des représentations (m, n)* Quelques propriétés combinatoires sont rappelées en marge<sup>2</sup>.

Le nombre de composantes indépendantes d'un tenseur  $v_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m}$  complètement symétrique en ses indices supérieurs et en ses indices inférieurs est égal, sans la condition de trace, à

$$\frac{3 \cdot 4 \cdots (2+m)}{m!} \frac{3 \cdot 4 \cdots (2+n)}{n!} = \frac{(m+2)(m+1)(n+2)(n+1)}{4}.$$

La condition de trace  $v_{i_1 j_2 \dots j_n}^{i_1 i_2 \dots i_m} = 0$  enlève

$$\frac{3 \cdot 4 \cdots (1+m)}{m!} \frac{3 \cdot 4 \cdots (1+n)}{n!} = \frac{(m+1)m(n+1)n}{4}$$

composantes indépendantes, ce qui implique que la dimension de la représentation  $(m, n)$ , égale à la différence de ces deux nombres, est donnée par

$$d_{(m,n)} = \frac{(m+1)(n+1)(m+n+2)}{2}. \quad (8.14)$$

En particulier, la  $(3, 0)$  est bien de dimension 10.

### Décomposition de Clebsch-Gordan

L'utilisation des tenseurs permet très facilement d'effectuer la décomposition d'un produit tensoriel. Par exemple, on a  $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{6} \oplus \bar{\mathbf{3}}$  (ce qu'on peut encore écrire  $(1, 0) \otimes (1, 0) = (2, 0) \oplus (0, 1)$ ). En effet, on a

$$v^i u^j = \frac{1}{2} (v^i u^j + v^j u^i) + \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} (\epsilon_{kpq} v^p u^q).$$

Un autre exemple est  $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$  (ou encore  $(1, 0) \otimes (0, 1) = (1, 1) \oplus (0, 0)$ ), résultat que l'on tire de

$$v^i u_j = \left( v^i u_j - \frac{1}{3} \delta_j^i (v^k u_k) \right) + \frac{1}{3} \delta_j^i (v^k u_k).$$

Comme dernier exemple, considérons le produit  $\mathbf{3} \otimes \mathbf{8}$ . On a

$$v^i u_k^j = \frac{1}{2} M_k^{ij} + \frac{1}{4} \epsilon^{ijp} N_{pk} + \frac{1}{8} (3\delta_k^i P^j - \delta_k^j P^i)$$

où on a posé

$$M_k^{ij} = v^i u_k^j + v^j u_k^i - \frac{1}{4} \delta_k^i v^p u_p^j - \frac{1}{4} \delta_k^j v^p u_p^i,$$

$$N_{pk} = \epsilon_{pqr} v^q u_k^r + \epsilon_{kqr} v^q u_p^r,$$

et  $P^j = v^k u_k^j$ . Ceci implique  $\mathbf{3} \otimes \mathbf{8} = \mathbf{15} \oplus \bar{\mathbf{6}} \oplus \mathbf{3}$  ou encore  $(1, 0) \otimes (1, 1) = (2, 1) \oplus (0, 2) \oplus (1, 0)$ .

### 2. Tenseurs complètement symétriques

Le nombre  $A_m^d$  de composantes indépendantes d'un tenseur complètement symétrique à  $m$  indices dans un espace de dimensions  $d$ , égal au nombre de  $m$ -suites  $(i_1, i_2, \dots, i_m)$  non décroissantes ( $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_m$ ) comportant les nombres  $\{1, 2, \dots, d\}$ , obéit à la relation :

$$A_{m+1}^d = A_m^d + A_m^{d-1} + A_m^{d-2} + \dots + A_m^1$$

(examinez les différentes manières de commencer la  $(m+1)$ -suite), d'où on tire

$$A_{m+1}^d = A_m^d + A_{m+1}^{d-1}.$$

La formule

$$A_m^d = \frac{(m+d-1)!}{m!(d-1)!}$$

est vérifiée pour le cas  $d=1$  et tout  $m$  ( $A_m^1 = 1$ ) ainsi que pour tout  $d$  et pour  $m=1$  ( $A_1^d = d$ ). Par récurrence, on en déduit que cette formule est vraie pour toute paire  $(d, m)$ .

### Tenseurs complètement antisymétriques

On vérifie aisément que le nombre  $C_m^d$  de composantes indépendantes d'un tenseur complètement antisymétrique à  $m$  indices dans un espace de dimensions  $d$ , égal au nombre de  $m$ -suites  $(i_1, i_2, \dots, i_m)$  croissantes ( $i_1 < i_2 < \dots < i_m$ ) comportant les nombres  $\{1, 2, \dots, d\}$ , est donné par

$$C_m^d = \frac{d(d-1) \cdots (d-m+1)}{m!}.$$



*Trialité* Soit la décomposition du produit tensoriel  $(m_1, n_1) \otimes (m_2, n_2)$ . On définit  $m = m_1 + m_2$  et  $n = n_1 + n_2$ . On notera que dans toute ces décompositions,  $m - n$  est conservé modulo 3. Ceci est une conséquence du fait que  $m - n$  vaut zéro modulo 3 pour les tenseurs invariants utilisés pour effectuer la réduction. Cette propriété s'appelle la trialité des représentations de  $su(3)$ .

### 8.3 Les poids de la représentation $(m, n)$

Considérons la représentation irréductible  $(m, n)$  de  $su(3)$ . Il est facile de voir qu'un tenseur  $v = (v_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m})$  diagonalise l'action des générateurs de Cartan s'il ne possède qu'une seule composante non nulle. Soit  $v$  un tel tenseur. Il a la forme

$$v \begin{array}{c} \overbrace{1 \dots 1}^{m_1 \text{ fois}} \overbrace{2 \dots 2}^{m_2 \text{ fois}} \overbrace{3 \dots 3}^{m_3 \text{ fois}} \\ \underbrace{1 \dots 1}_{n_1 \text{ fois}} \underbrace{2 \dots 2}_{n_2 \text{ fois}} \underbrace{3 \dots 3}_{n_3 \text{ fois}} \end{array} \quad (8.15)$$

où  $m_i$  est le nombre de fois que l'indice  $i$  apparaît en haut, tandis que  $n_i$  est le nombre de fois que l'indice  $i$  apparaît en bas. On a  $m = m_1 + m_2 + m_3$  et  $n = n_1 + n_2 + n_3$ . Le poids correspondant est <sup>3</sup>

$$v = [(m_1 - n_1) - (m_3 - n_3)] \mu^1 + [(n_2 - m_2) - (n_3 - m_3)] \mu^2 \quad (8.16)$$

Utilisant les relations  $\alpha_1 = 2\mu^1 - \mu^2$  and  $\alpha_2 = 2\mu^2 - \mu^1$ , on peut réécrire le poids  $v$  en terme du plus haut poids  $\mu_{p.h.} = m\mu^1 + n\mu^2$  comme

$$v = \mu_{p.h.} - m_2(\alpha_1 + \alpha_2) - m_3\alpha_1 - n_1(\alpha_1 + \alpha_2) - n_3\alpha_2. \quad (8.17)$$

Les tenseurs de plus haut poids n'ont qu'une seule composante non nulle,  $v_{22 \dots 22}^{11 \dots 11}$ . Quand on remplace un indice 1 supérieur par un indice 3, on soustrait la racine  $\alpha_1$  au poids. Quand on remplace un indice 1 supérieur par un indice 2, on soustrait la racine  $\alpha_1 + \alpha_2$ . Quand on remplace un indice 2 inférieur par un indice 3, on soustrait la racine  $\alpha_2$ . Et quand on remplace un indice 2 inférieur par un indice 1, on soustrait à nouveau la racine  $\alpha_1 + \alpha_2$ . Le poids le plus bas est obtenu en soustrayant  $(m + n)(\alpha_1 + \alpha_2)$  à  $m\mu_1 + n\mu_2$  et est égal à  $-m\mu_2 - n\mu_1$  puisque  $\alpha_1 + \alpha_2 = \mu_1 + \mu_2$ . Il correspond à  $v_{11 \dots 11}^{22 \dots 22}$ .

Les poids se répartissent sur des hexagones (en général non réguliers) emboîtés, invariants par le groupe de Weyl. Ces hexagones peuvent dégénérer en triangles équilatéraux quand trois côtés se réduisent à un point. Les poids de la représentation  $(4, 2) = \mathbf{60}$  sont représentés ci-dessous. Il y a 36 poids distincts, mais certains de ceux-ci sont dégénérés.

3. En effet, on rappelle de nouveau

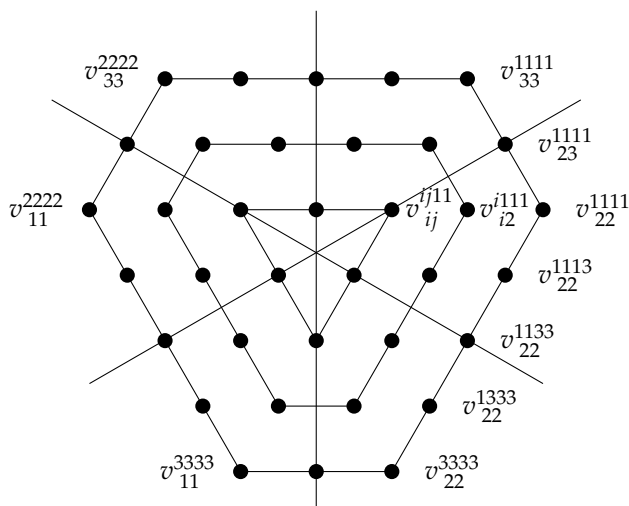
$$h_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$h_2 = \frac{\sqrt{3}}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

On trouve alors le poids  $v = (v_1, v_2)$  avec  $v_1 = \frac{1}{2}(m_1 - m_2 - n_1 + n_2)$  et  $v_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}(m_1 + m_2 - 2m_3 - n_1 - n_2 + 2n_3)$ . On rappelle

$$\mu^1 = \left( \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right), \quad \mu^2 = \left( \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6} \right)$$

ce qui mène au poids  $v = m_1\mu^1 - m_2\mu^2 - m_3(\mu^1 - \mu^2) - n_1\mu^1 + n_2\mu^2 + n_3(\mu^1 - \mu^2)$  que l'on peut réécrire comme (8.16).

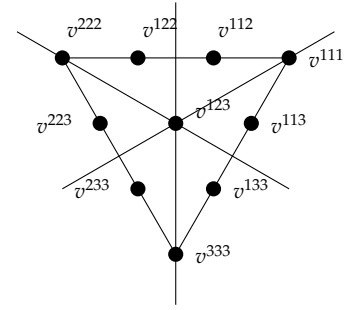
La représentation  $(4, 2) \equiv 60$ 

On a également représenté les axes des symétries engendrant le groupe de Weyl. Le plus haut poids est à droite. La ligne de poids en partant vers le bas est générée par l'action de  $e_1^\dagger$  tandis que la ligne de poids en partant vers le haut est générée par  $e_2^\dagger$ . A noter que dans  $v_{i_2}^{i_1 111}$ , l'indice  $i$  peut prendre deux valeurs distinctes ( $i = 1, 2$ ), ce qui donne  $v_{12}^{1111}$  et  $v_{22}^{1111}$ . De même, dans  $v_{ij}^{ij 11}$ , la paire symétrique  $(ij)$  peut prendre trois valeurs distinctes,  $(ij) = (11), (12), (22)$ , ce qui donne  $v_{11}^{1111}$ ,  $v_{12}^{1211}$  et  $v_{22}^{2211}$  (voir discussion plus bas).

*Hexagone extérieur* Pour comprendre la répartition des poids, partons du poids le plus haut  $v_{22\dots 22}^{11\dots 11}$ . On suppose d'abord  $m > 0, n > 0$ . En remplaçant un à un les indices 1 du haut par 3, on soustrait successivement  $\alpha_1, 2\alpha_1, \dots, m\alpha_1$ . Les poids correspondant se placent sur un segment de droite contenant  $m + 1$  poids, se terminant par  $v_{22\dots 22}^{33\dots 33}$ . Tous les tenseurs propres associés aux poids sur ce segment de droite ont tous leurs indices inférieurs égaux à 2. De même, en remplaçant un à un les indices 2 du bas par 3, on soustrait successivement  $\alpha_2, 2\alpha_2, \dots, m\alpha_2$ . Les poids correspondant se placent sur un segment de droite contenant  $n + 1$  poids, se terminant par  $v_{33\dots 33}^{11\dots 11}$ . Tous les tenseurs propres associés aux poids sur ce segment de droite ont tous leurs indices supérieurs égaux à 1. En utilisant le groupe de Weyl on engendre les 4 autres côtés de l'hexagone extérieur, qui contient ainsi  $3(m + n)$  poids. Les tenseurs correspondant n'ont aucun indice répété en haut et en bas. Tous leurs indices supérieurs (ou inférieurs) sont égaux et distincts des indices inférieurs (ou supérieurs). Les poids de la couche extérieure sont non dégénérés. Le groupe de Weyl agit par permutation des indices 1, 2, 3. Dans le cas de la représentation **60**, on a 18 poids.

Si  $m$  ou  $n$  est égal à zéro, l'hexagone extérieur dégénère en un

triangle équilatéral avec  $3m$  (ou  $3n$ ) poids distincts. Ceux-ci sont également non dégénérés. Les poids de la représentation  $(3, 0) = 10$  sont représentés en marge. Il y a au total 10 poids, dont 9 sont sur le triangle extérieur. Apparaissent également les axes de symétrie.



La représentation  $(3, 0) \equiv 10$

“Couches intérieures” Continuons l’analyse en supposant à nouveau  $m > 0, n > 0$ . Passons à la première couche intérieure, pour laquelle on a une seule répétition d’un indice du haut et d’un indice du bas. Cette répétition peut être celle de l’indice 1, de l’indice 2 ou de l’indice 3, mais ces trois possibilités ne sont pas indépendantes en raison de la condition de trace. Seules deux répétitions sont indépendantes, que l’on peut prendre  $\frac{1}{1}$  et  $\frac{2}{2}$ . Partant du vecteur de plus haut poids  $v_{22\dots22}^{11\dots11}$ , on passe à la première couche intérieure en remplaçant soit un indice inférieur 2 par 1, ce qui donne  $v_{12\dots22}^{11\dots11}$ , soit un indice supérieur 1 par 2, ce qui donne  $v_{22\dots22}^{21\dots11}$ . Ces deux vecteurs ont même poids car, comme le montre explicitement la formule (8.16), les poids ne dépendent que des différences  $m_i - n_i$ . La troisième possibilité  $v_{32\dots22}^{31\dots11}$  possède aussi le même poids mais n’est pas linéairement indépendante car

$$v_{32\dots22}^{31\dots11} = -v_{12\dots22}^{11\dots11} - v_{22\dots22}^{21\dots11}.$$

Le poids associé aux tenseurs  $v_{12\dots22}^{11\dots11}$  et  $v_{22\dots22}^{21\dots11}$ , égal à  $\mu - \alpha_1 - \alpha_2$ , est donc dégénéré deux fois.

En partant du tenseur  $v_{12\dots22}^{11\dots11}$ , on peut engendrer tous les tenseurs à une seule répétition  $\frac{1}{1}$  en remplaçant d’abord un à un les indices 1 “libres” du haut (non liés à la paire  $\frac{1}{1}$ ) par 3, puis par 2. De même, on remplace un à un les indices 2 du bas par 3 et puis par 1. On engendre ainsi un hexagone comme si  $v_{12\dots22}^{11\dots11}$  était le vecteur de plus haut poids de la représentation  $(m - 1, n - 1)$ . On obtient exactement le même hexagone associé aux tenseurs à une seule répétition  $\frac{2}{2}$  en partant de  $v_{22\dots22}^{21\dots11}$ . Le premier hexagone intérieur possède par conséquent  $3(m + n - 2)$  poids, tous dégénérés deux fois. Dans le cas de la représentation **60**, on a ainsi 12 poids sur l’hexagone intermédiaire, dégénérés deux fois.

On peut progresser de la même manière vers les couches intérieures plus profondes, qui contiennent de plus en plus de répétitions haut-bas. La  $k$ -ième couche intérieure contient  $k$  répétitions et est dégénérée  $k + 1$  fois (on compte la couche extérieure comme la couche numéro zéro). Elle est dégénérée  $k + 1$  fois car il y a  $k + 1$  manières de choisir  $k$  répétitions haut-bas : on peut répéter  $k$  1’s et 0 2’s,  $\frac{111\dots111}{111\dots111}$ ;  $k - 1$  1’s et un 2,  $\frac{211\dots111}{211\dots111}$ ;  $k - 2$  1’s et 2 2’s,  $\frac{221\dots111}{221\dots111}$  etc.

Si  $m = n$ , les hexagones sont réguliers et le processus s’arrête après  $m$  pas vers l’intérieur à l’origine, correspondant aux tenseurs à  $m$  répétitions, dégénérés  $m + 1$  fois. Si  $m \neq n$ , on arrive à un triangle

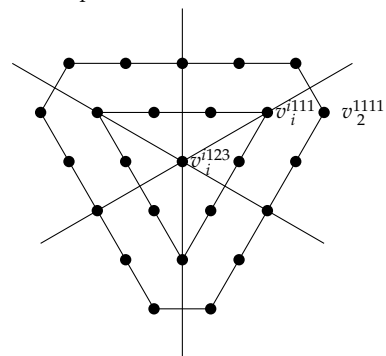
après  $n$  pas vers l'intérieur ( $n < m$ ) ou  $m$  pas vers l'intérieur ( $m < n$ ), possédant  $3(m - n)$  poids, dégénérés  $n + 1$  fois ( $n < m$ ) (ou  $3(n - m)$  poids, dégénérés  $m + 1$  fois ( $m < n$ )). Dans le cas de la représentation **60**, on a ainsi 6 poids sur le triangle intérieur, dégénérés trois fois.

Supposons  $m > n$  (si  $m < n$ , on considère la représentation complexe conjuguée qui a les mêmes propriétés). Pour comprendre ce qui se passe quand on passe d'un triangle au triangle intérieur suivant (s'il y en a un), oublions les répétitions  $^i_i$  éventuelles, qui jouent un rôle passif, et ne considérons que les indices libres (supérieurs) et appelons le premier triangle rencontré le triangle extérieur. Le tenseur de plus haut poids du triangle extérieur est  $v^{11\dots 1}$  avec  $m - n$  indices 1. La première arête est obtenue en changeant un à un les indices 1 en 2. La deuxième arête est obtenue en changeant un à un les indices 1 en 3. La troisième et dernière arête relie alors  $v^{22\dots 2}$  et  $v^{33\dots 3}$  en changeant un à un les indices 2 en 3. Les tenseurs du triangle extérieur ne contiennent pas le triple 123. On passe d'un triangle au suivant en ajoutant un triple 123, ce qui se fait, partant de 111, en soustrayant la racine  $\alpha_1$  ( $1 \rightarrow 3$ ) et puis la racine  $\alpha_1 + \alpha_2$  ( $1 \rightarrow 2$ ). Le tenseur de plus haut poids du triangle suivant est alors  $v^{1231\dots 1}$  avec  $m - n - 3$  indices 1 additionnels. Ceci est illustré sur les figures donnant les poids des représentations **10** et **35**. Comme ce tenseur est unique, il n'introduit pas de nouvelle dégénérescence. Si on se rappelle les indices à répétitions  $^i_i$ , il est donc aussi dégénéré que les tenseurs du dernier hexagone intérieur.

On vérifie aisément que le diagramme des poids épuise toutes les composantes du tenseur  $v^{i_1\dots i_m}_{j_1\dots j_n}$ .

*Règle de dégénérescence* On a démontré la règle de dégénérescence simple suivante : quand on passe d'une couche à la couche intérieure suivante, la dégénérescence des poids augmente d'une unité, jusqu'au moment où on atteint une couche triangulaire, à partir de laquelle la dégénérescence reste constante. Le premier hexagone (qui peut être dégénéré en triangle si  $m = 0$  ou  $n = 0$ ) possède  $3(m + n)$  poids distincts.

Un autre exemple :



La représentation  $(4, 1) \equiv 35$

A noter qu'ici,  $^i_i = ^1_1$  ou  $^2_2$  ( $v_i^{1111} = v_1^{1111}$  ou  $v_2^{1111}$  et  $v_i^{123} = v_1^{123}$  ou  $v_2^{123}$ ).

A titre de vérification, notons qu'on retrouve les bonnes dimensions pour les représentations

$$\begin{aligned} (4, 2) &\equiv 60 \quad (60 = 18 + 2 \times 12 + 3 \times 6), \\ (4, 1) &\equiv 35 \quad (35 = 15 + 2 \times 9 + 2 \times 1) \text{ et} \\ (3, 0) &\equiv 10 \quad (10 = 9 + 1). \end{aligned}$$

## 9

# *Théorème de Wigner-Eckart*

Dans ce chapitre nous introduirons le concept d'opérateur tensoriel  $O$  irréductible. Un cas particulier est un opérateur d'entrelacement que nous définirons en premier. Nous prouverons alors le théorème de Wigner-Eckart qui permet d'écrire les éléments de matrice  $\langle x|O|y\rangle$  (le produit hermitien du vecteur  $|x\rangle$  et de l'opérateur  $O$  appliqué à un vecteur  $|y\rangle$ ) en termes d'un nombre restreint d'éléments de matrices réduits. Les coefficients qui déterminent les éléments de matrice originaux en termes des éléments de matrice réduits sont fixés par la théorie des groupes en termes des coefficients de Clebsch-Gordan comme nous allons le démontrer. Nous appliqueront le théorème de Wigner-Eckart dans le cas de  $SU(3)$ .

### 9.1 *Opérateurs d'entrelacement et représentations complètement réductibles*

Soit  $T$  une représentation complètement réductible du groupe  $G$ ,

$$T = m_1 T^1 \oplus m_2 T_2 \oplus \dots \oplus m_k T^k. \quad (9.1)$$

Rappelons que dans le cas des groupes de Lie compacts ou finis, toute représentation est équivalente à une représentation complètement réductible.

On cherche dans cette section la forme la plus générale d'un **opérateur d'entrelacement**  $A$ , c'-à-d. la solution générale de l'équation

$$T(g)A = AT(g). \quad (9.2)$$

Dans une base bien choisie, les opérateurs  $T(g)$  de la représenta-

tion sont diagonaux par blocs,

$$T(g) = \begin{pmatrix} T^1(g) & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & T^1(g) & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & T^2(g) & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & T^2(g) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & T^k(g) & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & T^k(g) & \cdots \end{pmatrix},$$

Regroupons les représentations irréductibles équivalentes,

$$T(g) = \begin{pmatrix} \tilde{T}^1(g) & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & \tilde{T}^2(g) & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{T}^k(g) \end{pmatrix}, \quad (9.3)$$

La représentation irréductible  $T^i(g)$  apparaît  $m_i$  fois et est de taille  $n_i \times n_i$  où  $n_i$  est la dimension de la représentation  $T^i$ .

où  $\tilde{T}^i(g)$  contient  $m_i$  fois  $T^i(g)$ ,

$$\tilde{T}^i(g) = \begin{pmatrix} T^i(g) & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & T^i(g) & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & T^i(g) \end{pmatrix} \quad (9.4)$$

$\tilde{T}^i(g)$  est une matrice de taille  $m_i n_i \times m_i n_i$ .

Examinons d'abord ce qu'implique la condition (9.2) sur les blocs non diagonaux de  $A$  en supposant pour simplifier l'écriture que  $T(g)$  se réduit à

$$T(g) = \begin{pmatrix} \tilde{T}^1(g) & 0 \\ 0 & \tilde{T}^2(g) \end{pmatrix}, \quad (9.5)$$

le cas général étant une généralisation immédiate. Posant

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}. \quad (9.6)$$

Ici,  $\alpha$  est une matrice  $m_1 n_1 \times m_1 n_1$ ,  $\beta$  est une matrice  $m_1 n_1 \times m_2 n_2$ ,  $\gamma$  est une matrice  $m_2 n_2 \times m_1 n_1$  et  $\delta$  est une matrice  $m_2 n_2 \times m_2 n_2$ .

On trouve

$$\tilde{T}^1(g)\alpha = \alpha\tilde{T}^1(g), \quad (9.7)$$

$$\tilde{T}^1(g)\beta = \beta\tilde{T}^2(g), \quad (9.8)$$

$$\tilde{T}^2(g)\gamma = \gamma\tilde{T}^1(g), \quad (9.9)$$

$$\tilde{T}^2(g)\delta = \delta\tilde{T}^2(g). \quad (9.10)$$

Les opérateurs  $\beta$  et  $\gamma$  sont des opérateurs d'entrelacement entre  $\tilde{T}^1(g)$  et  $\tilde{T}^2(g)$  et sont donc nuls par le lemme de Schur. Par exemple,

en écrivant explicitement l'équation pour  $\beta$ , avec

$$\tilde{T}^1(g) = \begin{pmatrix} T^1(g) & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & T^1(g) \end{pmatrix}, \quad \tilde{T}^2(g) = \begin{pmatrix} T^2(g) & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & T^2(g) \end{pmatrix}, \quad (9.11)$$

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1m_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{m_11} & \cdots & \beta_{m_1m_2} \end{pmatrix} \quad (9.12)$$

(chaque bloc  $\beta_{i\alpha}$  où  $i = 1, \dots, m_1$  et  $\alpha = 1, \dots, m_2$  est de taille  $n_1 \times n_2$ ), on obtient les conditions d'entrelacement

$$T^1(g)\beta_{i\alpha} = \beta_{i\alpha}T^2(g) \quad (9.13)$$

qui impliquent  $\beta_{i\alpha} = 0$  par le lemme de Schur car  $T^1$  et  $T^2$  sont des représentations irréductibles inéquivalentes. On arrive à la même conclusion pour  $\gamma$ . Donc,  $A$  prend la forme

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}. \quad (9.14)$$

Examinons à présent la condition (9.7) pour  $\alpha$ . A cet effet, on observe que  $\tilde{T}^1(g) = T^1(g) \otimes I_{m_1 \times m_1}$ , i.e.,  $(\tilde{T}^1)_{iA,jB} = (T^1)_{ij}\delta_{AB}$  ( $i, j = 1, \dots, n_1$ ,  $A, B = 1, \dots, m_1$ ). Soit  $B_{AB}$  ( $A, B = 1, \dots, m_1$ ) une base des matrices  $m_1 \times m_1$ . On peut prendre par exemple  $(B_{AB})_{CD} = \delta_{AC}\delta_{BD}$ . La matrice  $\alpha$  peut s'écrire  $\alpha = \sum_{A,B} \mu_{AB} \otimes B_{AB}$  où les matrices  $n_1 \times n_1$   $\mu_{AB}$  sont données par

$$(\mu_{CD})_{ij} = (\alpha)_{iC,jD} \Leftrightarrow (\alpha)_{iC,jD} = \sum_{A,B} (\mu_{AB} \otimes B_{AB})_{iC,jD}.$$

La condition de commutation  $[\alpha, \tilde{T}^1(g)] = 0$  donne  $\sum_{A,B} [\mu_{AB}, T^1(g)] \otimes B_{AB} = 0$  et donc  $[\mu_{AB}, T^1(g)] = 0$ . Ceci implique, par le lemme de Schur,  $\mu_{AB} = \lambda_{AB} I_{n_1 \times n_1}$  pour certains nombres  $\lambda_{AB}$ . Injectant ce résultat dans  $\alpha$ , on obtient

$$\alpha = I_{n_1 \times n_1} \otimes B \quad (9.15)$$

où la matrice  $m_1 \times m_1$   $B$  est donnée par  $B = \sum_{A,B} \lambda_{AB} B_{AB}$ . La symétrie implique que pour connaître les  $(m_1 n_1)^2$  éléments de matrice de  $\alpha$ , il suffit de connaître les  $(m_1)^2$  éléments de matrice de  $B$ .

Revenant à  $T(g)$  écrit sous la forme (9.3), on en conclut, en utilisant les résultats précédents, que  $A$  est diagonale par blocs,

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & A_2 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{pmatrix}, \quad (9.16)$$

où

$$A_i = I_{n_i \times n_i} \otimes B_i \quad (9.17)$$

Par conséquent, pour connaître les  $(\sum_i n_i m_i)^2$  éléments de matrice de  $A$ , il suffit de connaître les  $\sum_i (m_i)^2$  éléments de matrice des  $B_i$  car  $A$  se réduit à (9.16) avec (9.17). C'est la conséquence de la symétrie.

En résumé, dans le cas des opérateurs d'entrelacement, la théorie des groupes ne contraint pas comment les représentations dégénérées (de même dimension mais de multiplicité plus grande que 1) se mélangent entre elles mais elle empêche les représentations différentes de se mélanger essentiellement par le lemme de Schur.

## 9.2 Coefficients de Clebsch-Gordan

Soient  $T^p$  et  $T^q$  deux représentations irréductibles unitaires d'un groupe  $G$ . Le produit tensoriel  $T \equiv T^p \otimes T^q$  se décompose en représentations irréductibles unitaires,

$$T^p \otimes T^q = \bigoplus_r m^{pq}_r T^r \quad (9.18)$$

où les  $m^{pq}_r$  sont les multiplicités.

Soient  $\{\phi_j^p\}$  ( $j = 1, \dots, n_p$ ),  $\{\psi_k^q\}$  ( $k = 1, \dots, n_q$ ) et  $\{\theta_l^{r,\alpha}\}$  ( $l = 1, \dots, n_r$ ;  $\alpha = 1, \dots, m^{pq}_r$ ) des bases orthonormées (= unitaires) des sous-espaces invariants  $X^p$ ,  $X^q$  et  $X^{r,\alpha}$  associés aux représentations irréductibles  $T^p$ ,  $T^q$  et  $T^r$ , respectivement (comme  $T^r$  apparaît  $m^{pq}_r$  fois, il y a  $m^{pq}_r$  copies de  $X^r$  paramétrisées par l'indice  $\alpha$ ). On a

$$T(g)\phi_j^p = \sum_{i=1}^{n_p} (T^p(g))_{ij} \phi_i^p, \quad (9.19)$$

$$T(g)\psi_k^q = \sum_{m=1}^{n_q} (T^q(g))_{mk} \psi_m^q, \quad (9.20)$$

$$T(g)\theta_l^{r,\alpha} = \sum_{u=1}^{n_r} (T^r(g))_{ul} \theta_u^{r,\alpha}. \quad (9.21)$$

Les vecteurs  $\phi_j^p \otimes \psi_k^q \equiv \phi_j^p \psi_k^q$  forment une base de l'espace  $X^p \otimes X^q$  à  $n_p n_q$  dimensions. Les  $\theta_l^{r,\alpha}$  aussi puisque

$$X^p \otimes X^q = \bigoplus_r \left( \bigoplus_{\alpha=1}^{m^{pq}_r} X^{r,\alpha} \right).$$

On a donc

$$\theta_l^{r,\alpha} = \sum_{j=1}^{n_p} \sum_{k=1}^{n_q} \left( \begin{matrix} p & q \\ j & k \end{matrix} \middle| \begin{matrix} r \\ l \end{matrix}, \alpha \right) \phi_j^p \psi_k^q \quad (9.22)$$

Les coefficients  $\left( \begin{matrix} p & q \\ j & k \end{matrix} \middle| \begin{matrix} r \\ l \end{matrix}, \alpha \right)$  sont appelés **coefficients de Clebsch-Gordan** et forment les composantes d'une matrice inversible  $n_p n_q \times$



$n_p n_q$ . Les formules du changement de base inverse sont

$$\phi_j^p \psi_k^q = \sum_r \sum_{\alpha=1}^{m^{pq}} \sum_{l=1}^{n_r} \begin{pmatrix} r, \alpha & | & p, q \\ l & | & j, k \end{pmatrix} \theta_l^{r, \alpha} \quad (9.23)$$

où les  $\begin{pmatrix} r, \alpha & | & p, q \\ l & | & j, k \end{pmatrix}$  sont les composantes de la matrice  $n_p n_q \times n_p n_q$  inverse de celle définie par les coefficients de Clebsch-Gordan. Comme les bases sont unitaires, on a

$$\begin{pmatrix} r, \alpha & | & p, q \\ l & | & j, k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p, q & | & r, \alpha \\ j, k & | & l \end{pmatrix}^* \quad (9.24)$$

Supposons que  $G$  est un groupe de Lie compact. Soit  $\mathcal{P}_{ul}^r$  l'opérateur défini par l'intégrale invariante (voir premier chapitre pour la définition de l'intégrale invariante)

$$\mathcal{P}_{ul}^r = n_r \int_G dv (T^r(g))_{ul}^* T(g). \quad (9.25)$$

**Théorème 9.1.** *Les opérateurs  $\mathcal{P}_{ul}^r$  projettent sur l'espace de la représentation  $T^r$ ,*

$$T(h) \mathcal{P}_{ul}^r = \sum_{p=1}^{n_r} (T^r(h))_{pu} \mathcal{P}_{pl}^r \quad (9.26)$$

$$\mathcal{P}_{ul}^r T(h) = \sum_{p=1}^{n_r} (T^r(h))_{lp} \mathcal{P}_{up}^r \quad (9.27)$$

et obéissent à

$$\mathcal{P}_{ul}^r \theta_v^{s, \alpha} = \delta_{lv} \delta^{rs} \theta_u^{r, \alpha}. \quad (9.28)$$

Nous ne prouverons pas ce théorème car une version très similaire a été vu pour les groupes finis dans le cadre de la preuve du théorème de Peter-Weyl. Dans le cas des groupes finis d'ordre  $n$  on a la définition analogue où on remplace l'intégrale invariante sur  $G$  par la somme sur  $G$  :

$$\int_G dv \rightarrow \frac{1}{n} \sum_{g \in G}. \quad (9.29)$$

**Théorème 9.2.** *Les coefficients de Clebsch-Gordan satisfont à la relation*

$$\sum_{\alpha=1}^{m^{pq}} \begin{pmatrix} p, q & | & r, \alpha \\ s, t & | & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p, q & | & r, \alpha \\ j, k & | & l \end{pmatrix}^* = n_r \int_G dv (T^p(g))_{sj} (T^q(g))_{tk} (T^r(g))_{ul}^*. \quad (9.30)$$

pour  $G$  un groupe de Lie compact et

$$\sum_{\alpha=1}^{m^{pq}} \begin{pmatrix} p, q & | & r, \alpha \\ s, t & | & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p, q & | & r, \alpha \\ j, k & | & l \end{pmatrix}^* = \frac{n_r}{n} \sum_{g \in G} (T^p(g))_{sj} (T^q(g))_{tk} (T^r(g))_{ul}^* \quad (9.31)$$

pour  $G$  un groupe fini d'ordre  $n$ .

*Démonstration.* Supposons  $G$  un groupe de Lie compact (la preuve est similaire pour les groupes finis). On applique  $\mathcal{P}_{ul}^r$  à (9.23). On obtient

$$\mathcal{P}_{ul}^r \left( \phi_j^p \psi_k^q \right) = \sum_{\alpha=1}^{m^{pq}} \binom{r, \alpha}{l} \binom{p, q}{j, k} \theta_u^{r, \alpha}.$$

Injectant ensuite (9.22), on tire

$$\mathcal{P}_{ul}^r \left( \phi_j^p \psi_k^q \right) = \sum_{s=1}^{n_p} \sum_{t=1}^{n_q} \sum_{\alpha=1}^{m^{pq}} \binom{r, \alpha}{l} \binom{p, q}{j, k} \binom{p, q}{s, t} \binom{r, \alpha}{u} \phi_s^p \psi_t^q \quad (9.32)$$

Mais d'autre part, par définition (9.25) de  $\mathcal{P}_{ul}^r$  et du produit tensoriel, on a :

$$\mathcal{P}_{ul}^r \left( \phi_j^p \psi_k^q \right) = n_r \sum_{s=1}^{n_p} \sum_{t=1}^{n_q} \int_G dv (T^p(g))_{sj} (T^q(g))_{tk} (T^r(g)^*)_{ul} \phi_s^p \psi_t^q \quad (9.33)$$

Le théorème découle de la comparaison de (9.32) avec (9.33), en utilisant l'unitarité (9.24) et l'indépendance linéaire des  $\phi_s^p \psi_t^q$ .  $\square$

### 9.3 Opérateurs tensoriels irréductibles : définition

Soient  $G$  un groupe et  $T$  une représentation de  $G$  dans l'espace vectoriel  $X$ . On dit les opérateurs  $O_k^q \in GL(X)$  ( $q$  fixé,  $k = 1, \dots, n_q$ ) forment un **opérateur tensoriel irréductible** ssi les  $O_k^q$  se transforment selon la représentation irréductible  $T^q$  de  $G$ . Plus précisément

$$T(g) O_k^q (T(g))^{-1} = \sum_{m=1}^{n_q} (T^q(g))_{mk} O_m^q \quad (9.34)$$

où les  $(T^q(g))_{mk}$  sont les éléments de matrice des opérateurs de la représentation  $T^q$ .

Si  $G$  est un groupe de Lie d'algèbre de Lie  $\mathcal{G}$ ,  $s(x)$  la représentation de  $\mathcal{G}$  correspondant à  $T$  et  $s^q$  celle correspondant à  $T^q$ , alors la relation (9.34) implique

$$[s(x), O_k^q] = \sum_{m=1}^{n_q} (s^q(x))_{mk} O_m^q \quad (9.35)$$

*Exemple 1 :* si  $T^q$  est la représentation triviale à une dimension,  $O_k^q \equiv O$  et les équations ci-dessus se réduisent à

$$T(g) O (T(g))^{-1} = O \iff [T(g), O] = 0 \quad (9.36)$$

$$[s(x), O] = 0 \quad (9.37)$$

$O$  est un opérateur qui entrelace  $T$  avec  $T$ .

Les opérateurs tensoriels irréductibles sont donc des généralisations des opérateurs d'entrelacement.

*Exemple 2* : l'opérateur de position  $\mathbf{r}$  est un opérateur tensoriel qui se transforme dans la représentation vectorielle ( $D_1$ ) de  $SO(3)$ . Les matrices de représentation de  $SO(3)$  sont les opérateurs hermitiens  $J_a = \epsilon_{abc} r_b p_c$ . Ils agissent comme

$$[J_a, r_b] = \epsilon_{acd} [r_c p_d, r_b] = -i \epsilon_{acb} r_c, \quad (9.38)$$

et donc  $r_a$  se transforme bien comme un vecteur car  $i \epsilon_{abc}$  sont les constantes de structure de  $so(3)$  (dans les conventions des physiciens).

#### 9.4 Théorème de Wigner-Eckart

Le théorème de Wigner-Eckart généralise aux opérateurs tensoriels irréductibles ce que nous avons vu pour les opérateurs d'entrelacement : les conditions de symétrie permettent d'exprimer les éléments de matrice d'un opérateur tensoriel irréductible en terme d'un petit nombre "d'éléments de matrice réduits".

**Théorème 9.3. [Théorème de Wigner-Eckart]** Soient  $G$  un groupe fini ou un groupe de Lie compact et  $T$  une représentation unitaire de  $G$  dans l'espace vectoriel  $X$ . Soit  $(\cdot, \cdot)$  le produit hermitien  $X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ .

Supposons que  $T$  contienne les représentations irréductibles  $T^p$  et  $T^r$  de dimensions  $n_p$  et  $n_r$  (avec une multiplicité qui peut être plus grande que 1). Soient  $X^p$  et  $X^r$  des sous-espaces invariants irréductibles associés à  $T^p$  et  $T^r$  et  $\{\phi_j^p\}$  ( $j = 1, \dots, n_p$ ) et  $\{\psi_l^r\}$  ( $l = 1, \dots, n_r$ ) des bases orthonormées des espaces  $X^p$  et  $X^r$ .

Soit  $O_k^q$  un opérateur tensoriel irréductible se transformant dans la représentation  $T^q$  (voir (9.34)). On note comme précédemment  $m^{pq}_r$  la multiplicité de  $T^r$  dans  $T^p \otimes T^q$ . On a

$$\left( \psi_l^r, O_k^q \phi_j^p \right) = \sum_{\alpha=1}^{m^{pq}_r} \left( \begin{matrix} p & q & r \\ j & k & l \end{matrix} \middle| \alpha \right)^* (r|O^q|p)_\alpha \quad (9.39)$$

où les  $(r|O^q|p)_\alpha$  sont  $m^{pq}_r$  "éléments de matrice réduits" qui ne dépendent pas de  $j, k$  et  $l$ . La dépendance en  $j, k, l$  est entièrement donnée par les coefficients de Clebsch-Gordan.

*Démonstration.* Comme les opérateurs  $T(g)$  sont unitaires, on a

$$\begin{aligned} \left( \psi_l^r, O_k^q \phi_j^p \right) &= \left( T(g) \psi_l^r, T(g) O_k^q \phi_j^p \right) \\ &= \left( T(g) \psi_l^r, T(g) O_k^q (T(g))^{-1} T(g) \phi_j^p \right) \\ &= \sum_{s=1}^{n_p} \sum_{t=1}^{n_q} \sum_{u=1}^{n_r} (T^p(g))_{sj} (T^q(g))_{tk} (T^r(g))_{ul}^* \left( \psi_u^r, O_t^q \phi_s^p \right) \end{aligned}$$

Supposons  $G$  groupe de Lie compact. Intégrant sur  $g \in G$ , on obtient,

$$\left(\psi_l^r, O_k^q \phi_j^p\right) = \sum_{s=1}^{n_p} \sum_{t=1}^{n_q} \sum_{u=1}^{n_r} \int_G d\nu (T^p(g))_{sj} (T^q(g))_{tk} (T^r(g))_{ul}^* \left(\psi_u^r, O_t^q \phi_s^p\right) \quad (9.40)$$

d'où on tire, grâce à (9.30), la relation cherchée,

$$\left(\psi_l^r, O_k^q \phi_j^p\right) = \sum_{\alpha=1}^{m^{pq}} \left(\begin{matrix} p & q \\ j & k \end{matrix} \middle| \begin{matrix} r & \alpha \\ l & \end{matrix}\right)^* (r|O^q|p)_\alpha \quad (9.41)$$

où les  $(r|O^q|p)_\alpha$  sont donnés par

$$(r|O^q|p)_\alpha = \frac{1}{n_r} \sum_{s=1}^{n_p} \sum_{t=1}^{n_q} \sum_{u=1}^{n_r} \left(\begin{matrix} p & q \\ s & t \end{matrix} \middle| \begin{matrix} r & \alpha \\ u & \end{matrix}\right) \left(\psi_u^r, O_t^q \phi_s^p\right) \quad (9.42)$$

On obtient le même résultat dans le cas des groupes finis.  $\square$

On observe en particulier que l'élément de matrice  $\left(\psi_l^r, O_k^q \phi_j^p\right)$  n'est non nul que si le produit tensoriel  $T^p \otimes T^q$  contient la représentation  $T^r$  dans sa décomposition ( $m_r^{pq} \neq 0$ ). Aussi, le nombre de constantes non déterminées par la théorie des groupes dans  $\left(\psi_l^r, O_k^q \phi_j^p\right)$ , c'est-à-dire le nombre d'éléments de matrice réduits, est égal à la multiplicité de  $T^r$  dans  $T^p \otimes T^q$ .

### 9.5 Théorème de Wigner-Eckart pour $SU(3)$

On considère le groupe  $SU(3)$ . Le théorème de Wigner-Eckart prend une forme particulièrement simple en termes de tenseurs. Soit  $u = \left(u_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m}\right)$  un tenseur de la représentation  $(m, n)$ ,  $v = \left(v_{j_1 \dots j_{n'}}^{i_1 \dots i_{m'}}\right)$  un tenseur de la représentation  $(m', n')$  et  $\Theta = \left(\Theta_{j_1 \dots j_{n''}}^{i_1 \dots i_{m''}}\right)$  un opérateur tensoriel irréductible se transformant dans la représentation  $(m'', n'')$ . On sait que l'élément de matrice  $(u, \Theta v)$  est non nul si et seulement si le produit tensoriel  $(m', n') \otimes (m'', n'')$  contient  $(m, n)$ . On sait aussi que le nombre de constantes non fixées par la théorie des groupes est égal à la multiplicité de  $(m, n)$  dans  $(m', n') \otimes (m'', n'')$ . Il faut donc décomposer le produit  $\Theta_{j_1 \dots j_{n''}}^{i_1 \dots i_{m''}} v_{\ell_1 \dots \ell_{n'}}^{k_1 \dots k_{m'}}$  en composantes irréductibles et déterminer s'il contient des tenseurs de type  $\binom{m}{n}$  dans sa décomposition. On extrait ces composantes irréductibles  $(m, n)$  en prenant le produit scalaire avec  $u$ .

Illustrons le théorème dans le cas où  $u, v$  et  $\Theta$  se transforment tous les trois dans la  $\mathbf{8}$ . Le produit  $\mathbf{8} \otimes \mathbf{8}$  à 64 dimensions se décompose en :

— la  $(2, 2) \equiv \mathbf{27}$ , obtenue en enlevant les traces de

$$\Theta_{(j}^{(i} v_{\ell)}^{k)};$$

— la  $(1, 1) \equiv \mathbf{8}$  qui apparaît en prenant une trace ; elle apparaît deux fois car il y a deux manières de prendre une trace,

$$\Theta^i_j v^k_i \quad \text{et} \quad \Theta^i_j v^j_{\ell};$$

— la  $(0, 0) \equiv \mathbf{1}$  qui apparaît en prenant la double trace,

$$\Theta^i_j v^j_i;$$

— la  $(3, 0) \equiv \mathbf{10}$  et la  $(0, 3) \equiv \overline{\mathbf{10}}$ , obtenues à partir de  $\epsilon^{j\ell(m}\Theta^i_j v^k_{\ell})$  et  $\epsilon_{ik(m}\Theta^i_j v^k_{\ell})$ .

Ceci donne bien  $27 + 2 \times 8 + 1 + 2 \times 10 = 64$  dimensions. On a par le théorème de Wigner-Eckart

$$(u, \Theta v) = \lambda_1 \bar{u}^j_k \left( \Theta^i_j v^k_i - \frac{1}{3} \delta^k_j \Theta^p_q v^q_p \right) + \lambda_2 \bar{u}^{\ell}_i \left( \Theta^i_j v^j_{\ell} - \frac{1}{3} \delta^i_{\ell} \Theta^p_q v^q_p \right)$$

Observant que les termes de trace s'en vont car  $u^i_j$  est sans trace et utilisant des notations matricielles, on obtient

$$(u, \Theta v) = \lambda_1 \text{Tr}(\bar{u}v\Theta) + \lambda_2 \text{Tr}(\bar{u}\Theta v). \quad (9.43)$$

Les  $8 \times 8 \times 8 = 512$  éléments de matrice  $(u, \Theta v)$  ne dépendent que de deux paramètres.

De la même manière, si  $u$  et  $v$  se transforment dans la  $\mathbf{10}$  et  $\Theta$  dans la  $\mathbf{8}$ , on obtient

$$(u, \Theta v) = \lambda \bar{u}_{ijk} \Theta^i_{\ell} v^{\ell jk} \quad (9.44)$$

car le produit tensoriel  $\mathbf{8} \otimes \mathbf{10}$  ne contient la  $\mathbf{10}$  qu'une fois, déterminée par  $\Theta^i_{\ell} v^{jk\ell}$ . Les 800 éléments de matrice  $(u, \Theta v)$  ne dépendent que d'un paramètre.



## Interactions fortes et symétrie $SU(3)$

Retournons dans les années 50 au moment de la découverte des particules étranges. Déjà dans les années 1940 les mésons  $\pi$  avaient été découverts après une prédiction par Yukawa. Ils s'appellent mésons car leur masse est intermédiaire entre celle de l'électron et celles des nucléons. Ils forment un triplet de particules qui ont la même masse mais ont des charges électriques  $-1, 0, 1$  dans les unités de la charge de l'électron. En 1947, de nouvelles particules instables "étranges", nommées kaons ou mésons  $K$ , avaient été observées par Rochester et Butler dans des chambres à bulles frappées par des rayons cosmiques. Au début des années 50 après des expériences plus précises il fut réalisé qu'il y avait 4 kaons différents et qu'il était utile de classer ces nouvelles particules avec un nouveau nombre quantique : l'**étrangeté**  $S$ . Les particules qui ont un nombre  $S$  non-zéro sont des particules étranges par définition. Il fut aussi vite été réalisé qu'il plus commode d'introduire l'**hypercharge**  $Y$  qui est la somme du nombre baryonique  $B$  et de l'étrangeté,

$$Y = B + S. \quad (10.1)$$

### 10.1 L'approche de Gell-Mann

En 1961, Gell-Mann proposa le modèle "the eight-fold way" basé sur le groupe  $SU(3)$  pour classer les propriétés des hadrons (baryons et mésons) connus de l'époque. En fait, les hadrons connus en 1961 sont composés des trois quarks légers  $u$ ,  $d$  et  $s$  ("up", "down" et "strange", "haut", "bas" et "étrange") de la théorie de la chromodynamique quantique qui décrit les interactions fortes découverte par la suite. Ces trois quarks possèdent des masses proches par rapport à l'échelle de masse de la chromodynamique quantique  $\Lambda_{QCD} \approx 200$  MeV ( $u$  : de 1,5 à 3,3 MeV ;  $d$  : de 3,5 à 6 MeV ;  $s$  : de 80 à 130 MeV ; en comparaison :  $c$  : de 1,15 à 1,35 GeV ;  $b$  : de 4,1 à 4,4 GeV et  $t$  :  $173 \pm 3$  GeV). Donc la théorie des interactions fortes possède une

1. Le nombre baryonique a été introduit comme +1 pour les nucléons (protons et neutrons) et 0 pour les mésons. En fait, après la découverte de la structure des quarks, on peut le définir comme  $B = \frac{1}{3}(n_q - n_{\bar{q}})$  où  $n_q$  et  $n_{\bar{q}}$  sont le nombre de quarks et d'anti-quarks qui composent la particule.

symétrie globale  $SU(3)$  approchée pour ces trois quarks légers<sup>2</sup>. Le sous-groupe  $SU(2)$  qui agit sur les quarks  $u$  et  $d$  est presque exact et appelé le sous-groupe d'**isospin**. Il est engendré par les générateurs  $T_1, T_2$  et  $T_3$  par convention avec la valeur de  $T_3$  donnant l'isospin. Le générateur  $T_8$  commute avec l'isospin.

Gell-Mann a imaginé que l'on pouvait diviser les interactions fortes en deux parties :

- les interactions très fortes ("very strong interactions"), qui sont invariantes sous  $SU(3)$  ;
- les interactions moyennement fortes ("medium strong interactions") qui brisent  $SU(3)$  mais préservent l'isospin et le générateur  $T_8$ .

L'isospin lui-même est brisé par l'interaction électrofaible.

Il a montré que la symétrie  $SU(3)$  permettait de comprendre de nombreuses propriétés des hadrons comme nous allons le détailler. Nous prendrons cependant une approche moderne en donnant d'abord les propriétés des quarks sous la symétrie approchée.

### 10.2 "The eight-fold way"

Les deux générateurs de Cartan de  $SU(3)$  permettent d'associer deux nombres quantiques aux hadrons, à savoir l'isospin  $T_3$  et l'hypercharge  $Y \equiv 2T_8/\sqrt{3}$ . Physiquement, on relie la charge électrique à l'isospin et à l'hypercharge par

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2} \tag{10.2}$$

On postule que les quarks  $u, s$  et  $d$  se transforment selon la  $\mathbf{3}$  de  $SU(3)$ . Les nombres quantiques de l'isospin et de l'hypercharge sont donc entièrement fixés par les poids de la représentation  $\mathbf{3}$  illustrés en marge.

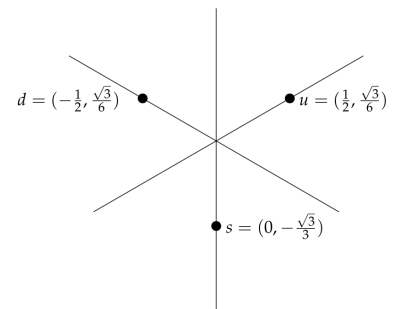
Ceci conduit aux nombres quantiques des quarks  $u, d, s$  :

Quark	Isospin	Hypercharge	Nombre baryonique	Etrangeté	Charge électrique
$u$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
$d$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$
$s$	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{1}{3}$

et des anti-quarks  $\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$  dans la  $\bar{\mathbf{3}}$  :

2. Le lagrangien de la chromodynamique quantique possède aussi un groupe de jauge  $SU(3)$  (le  $SU(3)$  des couleurs de quarks) qui n'a strictement rien à voir avec cette symétrie globale approchée  $SU(3)$  qui est dite "des saveurs" (flavor symmetry en anglais).

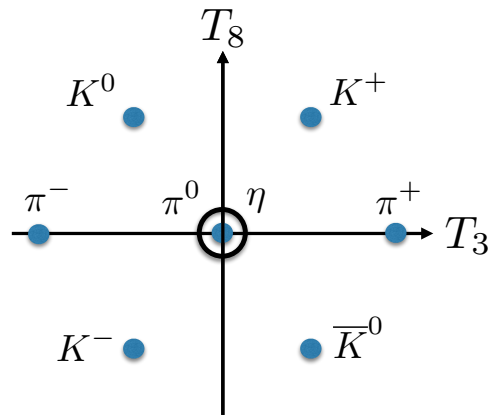
FIGURE 10.1: La représentation  $(1,0) \equiv \mathbf{3}$  :





Anti-Quark	Isospin	Hypercharge	Nombre baryonique	Etrangeté	Charge électrique
$\bar{u}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$
$\bar{d}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
$\bar{s}$	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$

Les mésons sont des états liés quark-antiquark ; les baryons sont des états liés de trois quarks. Regardons tout d'abord les mésons. On a  $3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$ . Les mésons s'organisent donc dans un octet et un singlet. Après analyse, les 7 particules connues en 1961 (les mésons  $\pi : \pi^-, \pi^0, \pi^+$  et les mésons  $K : K^0, K^+, K^-, \bar{K}^0$ ) s'organisent comme suit :



L'isospin et l'hypercharge se déduisent de la représentation et l'étrangeté et la charge électrique peuvent en être déduits en posant que le nombre baryonique  $B = 0$  pour les mésons. Vu que l'octet doit contenir un autre méson  $\eta$  avec les mêmes nombres quantiques que le méson  $\pi^0$ , Gell-Mann a pu prédire l'existence de cette particule en 1961<sup>3</sup>. La particule  $\eta$  (de masse plus importante à cause de la brisure de symétrie) fut rapidement identifiée ce qui a confirmé la viabilité de la théorie.

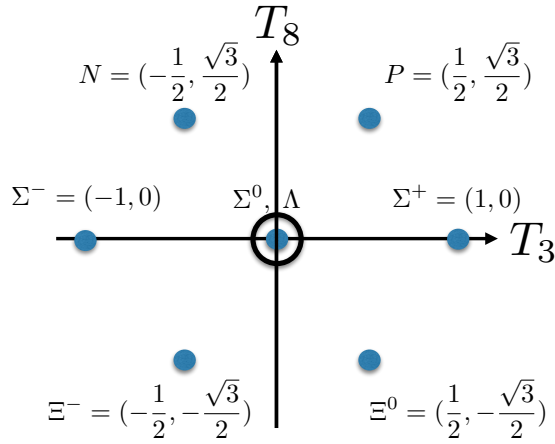
La puissance de théorie des représentations de  $SU(3)$  ne s'arrête pas là. Examinons maintenant les baryons. On a  $3 \otimes 3 = 6 \oplus \bar{3}$  et  $6 \otimes 3 = 10 \oplus 8$  (exercice). Donc,

$$\begin{aligned}
 3 \otimes 3 \otimes 3 &= (6 \oplus \bar{3}) \otimes 3 \\
 &= (6 \otimes 3) \oplus (\bar{3} \otimes 3) \\
 &= 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1.
 \end{aligned} \tag{10.3}$$

Intéressons nous maintenant à l'octet  $8$  contenant les nucléons stables (proton  $P$  et neutron  $N$  d'étrangeté  $S = 0$ , de nombre baryonique  $B = 1$  et de charges électriques  $Q = +1, 0$ ). Après analyse des particules connues, Gell-Mann arriva à la classification<sup>4</sup> :

3. En fait, le singlet donne une autre particule  $\eta'$  mais en fait à cause des interactions moyennement fortes les particules  $\eta$  et  $\eta'$  se mélangent. Note historique : quelques mois plus tard, la même classification fut établie par Nakano et Nishijima (source : le communiqué du prix Nobel de Gell-Mann en 1969).

4. Note historique : Quelques mois plus tard en 1961, Ne'eman arriva à la même classification.



A côté des nucléons qui forment un doublet pour l'isospin, il y a les baryons étranges suivants qui ont des masses très proches :

- un isotriplet (représentation  $D_1$  pour l'isospin) de baryons avec  $S = -1$ ,

$$\Sigma^+ (T_3 = 1), \quad \Sigma^0 (T_3 = 0), \quad \Sigma^- (T_3 = -1), \quad (10.4)$$

- un isosinglet (isospin 0) aussi d'étrangeté  $S = -1$ ,

$$\Lambda (T_3 = 0), \quad (10.5)$$

- et un isodoublet (isospin 1/2) d'étrangeté  $S = -2$ ,

$$\Xi^0 (T_3 = \frac{1}{2}), \quad \Xi^- (T_3 = -\frac{1}{2}). \quad (10.6)$$

Ceci conduit aux nombres quantiques de l'octet des baryons suivants :

Baryon	Isospin	Hypercharge	Nombre baryonique	Etrangeté	Charge électrique
$P$	$\frac{1}{2}$	1	1	0	1
$N$	$-\frac{1}{2}$	1	1	0	0
$\Sigma^+$	1	0	1	-1	1
$\Sigma^0$	0	0	1	-1	0
$\Sigma^-$	-1	0	1	-1	-1
$\Lambda$	0	0	1	-1	0
$\Xi^0$	$\frac{1}{2}$	-1	1	-2	0
$\Xi^-$	$-\frac{1}{2}$	-1	1	-2	-1

La représentation 8 est la représentation adjointe des tenseurs  $\binom{1}{1}$ . On peut représenter l'état le plus général de cette représentation

comme une matrice  $3 \times 3$  de trace nulle,

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & \Sigma^+ & P \\ \Sigma^- & -\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & N \\ \Xi^- & \Xi^0 & -\frac{2\Lambda}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad (10.7)$$

où  $\Sigma^0$ ,  $\Lambda$ ,  $P$  etc désignent les composantes (complexes) selon les vecteurs propres de la représentation adjointe. Physiquement, elles représentent les fonctions d'onde des particules. A noter que l'on a normalisé les coefficients de telle sorte que

$$(B, B) = \text{Tr}(B^\dagger B) = |P|^2 + |N|^2 + |\Sigma^+|^2 + |\Sigma^0|^2 + |\Sigma^-|^2 + |\Lambda|^2 + |\Xi^0|^2 + |\Xi^-|^2. \quad (10.9)$$

Notez que si seule la composante  $P$  est différente de zéro, on a un proton car alors la matrice est égale à

$$P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P(T_4 + iT_5) \quad (10.8)$$

qui est bien vecteur propre de  $T_3$  et  $T_8$  pour les valeurs propres  $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$  qui caractérisent le proton, etc.

### 10.3 La formule de masse de Gell-Mann Okubo

Si  $SU(3)$  était une symétrie exacte, toutes les particules de l'octet fondamental auraient la même masse. Comme  $SU(3)$  est brisé, les particules ont des masses différentes. Cependant, comme  $SU(3)$  est une symétrie approchée les différences de masse entre les baryons de l'octet peuvent être comprises en terme de  $SU(3)$ . Il s'agit de calculer

$$(B, H_F B)$$

où  $H_F$  est l'hamiltonien des interactions fortes. Cet Hamiltonien peut être écrit comme la somme de deux termes,

$$H_F = H_{TF} + H_{MF} \quad (10.10)$$

où l'hamiltonien  $H_{TF}$  des interactions très fortes commute avec  $SU(3)$  (et donc contribue la même constante pour tous les baryons de l'octet) et où l'hamiltonien  $H_{MF}$  des interactions moyennement fortes brise la symétrie  $SU(3)$  et donne une différence de masse petite par rapport à  $(B, H_{TF} B)$ . L'hamiltonien  $H_{MF}$  commute avec le  $SU(2)$  d'isospin et l'hypercharge. Gell-Mann a supposé (i) que  $H_{MF}$  est une des composantes d'un opérateur tensoriel  $O^i_j$  se transformant selon la  $\mathbf{8}$  de  $SU(3)$ , et donc  $O^i_j = \mu^a (T_a)^i_j$ ,  $a = 1, \dots, 8$ ; et (ii) plus précisément, que  $H_{MF}$  se transforme comme  $T_8$ ,  $(H_{MF})^i_j = \mu^8 (T_8)^i_j$ . Cela implique  $[H_{MF}, T_i] = 0$  pour les générateurs de  $SU(2)$  et  $[H_{MF}, Y] = 0$  pour l'hypercharge.

Par le théorème de Wigner-Eckart appliqué à  $\mathbf{8} \otimes \mathbf{8} \rightarrow \mathbf{8}$ , voir (9.43) démontré au chapitre précédent, on sait que les éléments de matrice  $(B, H_{MF} B)$  ne dépendent que de deux paramètres,

$$(B, H_{MF} B) = x \text{Tr}(B^\dagger B T_8) + y \text{Tr}(B^\dagger T_8 B) \quad (10.11)$$

(pour la  $\mathbf{8}$ ,  $\bar{u} = u^\dagger$ ). Comme  $T_8$  est diagonal, ceci donne

$$(B, H_{MF}B) = \frac{x}{\sqrt{12}} \left( (B^\dagger B)_1^1 + (B^\dagger B)_2^2 - 2(B^\dagger B)_3^3 \right) + \frac{y}{\sqrt{12}} \left( (BB^\dagger)_1^1 + (BB^\dagger)_2^2 - 2(BB^\dagger)_3^3 \right). \quad (10.12)$$

Développant les termes, on obtient

$$(B, H_{MF}B) = \frac{x}{\sqrt{12}} \left( |\Sigma|^2 + |\Xi|^2 - |\Lambda|^2 - 2|N|^2 \right) + \frac{y}{\sqrt{12}} \left( |\Sigma|^2 + |N|^2 - |\Lambda|^2 - 2|\Xi|^2 \right) \quad (10.13)$$

Dans (10.13), on somme sur les différents types de particules d'une même représentation d'isospin, e.g.,  $|N|^2$  est la somme sur les nucléons (proton et neutron). Ceci implique

$$\begin{aligned} M_N &= M_0 - \frac{2x}{\sqrt{12}} + \frac{y}{\sqrt{12}}, \\ M_\Sigma &= M_0 + \frac{x}{\sqrt{12}} + \frac{y}{\sqrt{12}}, \\ M_\Lambda &= M_0 - \frac{x}{\sqrt{12}} - \frac{y}{\sqrt{12}}, \\ M_\Xi &= M_0 + \frac{x}{\sqrt{12}} - \frac{2y}{\sqrt{12}}, \end{aligned}$$

où  $M_0$  est la contribution commune de  $H_{TF}$ . Il y a 4 masses et 3 paramètres. On peut ainsi tirer une relation entre les 4 masses, qui est une conséquence directe de la symétrie

$$\boxed{2(M_N + M_\Xi) = M_\Sigma + 3M_\Lambda}. \quad (10.14)$$

C'est la formule de Gell-Mann-Okubo.

Elle est remarquablement précise. En effet, on peut la récrire de manière équivalente

$$M_\Lambda = \frac{1}{3} (2(M_N + M_\Xi) - M_\Sigma), \quad (10.15)$$

ce qui donne, tenant compte de

$$M_N = 940 \text{ Mev}, \quad M_\Sigma = 1190 \text{ Mev}, \quad M_\Xi = 1320 \text{ Mev},$$

une masse pour la particule  $\Lambda$  égale à

$$M_\Lambda = 1110 \text{ Mev}. \quad (10.16)$$

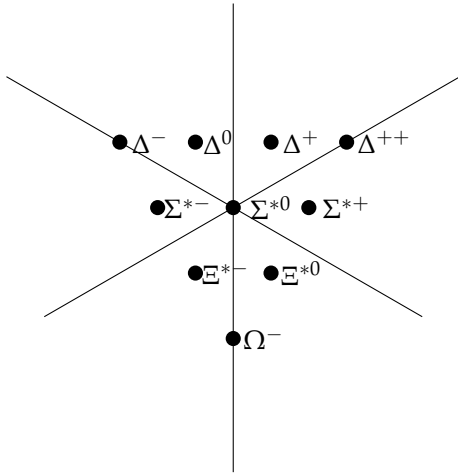
La valeur expérimentale est de 1115 Mev.

Par exemple,

$$(B^\dagger B)_1^1 = \left| \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} \right|^2 + |\Sigma^-|^2 + |\Xi^-|^2 \text{ etc.}$$

### Résonances hadroniques

A côté de l'octet des hadrons que nous venons de décrire, il existe un décuplet **10** de résonances hadroniques



La représentation  $(3,0) \equiv \mathbf{10}$

Quand le groupe  $SU(3)$  fut introduit dans l'étude des interactions fortes, le  $\Omega^-$  n'avait pas encore été découvert. Gell-Mann a prédit l'existence de cette particule et ses nombres quantiques afin de compléter la représentation **10** (singlet d'isospin,  $T_3 = 0$ , et hypercharge  $Y = -2$ , donc  $S = -3$  et  $Q = -1$ ). Il a pu également prédire sa masse, en calculant  $(B^*, H_{MF} B^*)$  comme ci-dessus, où  $B^*$  représente le décuplet. Vu le théorème de Wigner-Eckart appliqué à  $\mathbf{8} \otimes \mathbf{10} \rightarrow \mathbf{10}$ , voir (9.44), il n'y a cette fois-ci qu'un seul paramètre. De plus, comme  $H_{MF} \sim T_8 \sim Y$ , l'isospin n'entre pas ligne en compte dans cet élément de matrice et l'élément de matrice est proportionnel à l'hypercharge. Donc, les différences de masses entre les différentes représentations d'isospin sont égales,

$$M_{\Sigma^*} - M_{\Delta} = M_{\Xi^*} - M_{\Sigma^*} = M_{\Omega^-} - M_{\Xi^*}. \quad (10.17)$$

On a

$$M_{\Delta} = 1230 \text{ Mev}, \quad M_{\Sigma^*} = 1385 \text{ Mev}, \quad M_{\Xi^*} = 1530 \text{ Mev}$$

(espacement de 145 MeV et 155 MeV) ce qui donne un espacement moyen de 150 MeV et donc une masse d'environ 1680 MeV pour le  $\Omega^-$ . La valeur observée de 1672 MeV en est très proche.

Cette prédiction en 1962 par Gell-Mann qui fut vérifiée expérimentalement en 1964 fut un des triomphes de la symétrie approchée globale  $SU(3)$  et lui a valu le prix Nobel en 1969. C'est aussi une illustration des incroyables contraintes que la théorie des représentations des groupes de Lie peut apporter à la physique.



## Sous-algèbres des algèbres simples compactes

### 11.1 Sous-algèbres maximales

Une sous-algèbre propre  $g'$  de  $g$ , notée  $g \supset g'$ , est une sous-algèbre non triviale  $g' \neq 0$  distincte de  $g$ . La sous-algèbre propre  $g'$  est une **sous-algèbre maximale** si il n'existe pas d'algèbre propre  $g^*$  telle que  $g \supset g^* \supset g'$ . Si toutes les sous-algèbres maximales de toutes les algèbres de Lie compactes simples sont classifiées, toutes les sous-algèbres pourront alors être trouvée par itérations successives.

Les sous-algèbres maximales des algèbres de Lie compactes simples forment deux catégories appelées **régulière** (R) et **spéciale** (S). Etudions tout d'abord le cas de  $su(3)$ . On a vu que  $T_1, T_2, T_3, T_8$  forment une sous-algèbre  $su(2) \oplus u(1)$  (celle utilisée dans la classification "the eight-fold way" des hadrons). Il est facile de se convaincre qu'elle est maximale. Une caractéristique de cette sous-algèbre est que les générateurs de Cartan de  $su(2) \oplus u(1)$  sont identiques à ceux de  $su(3)$ ; aussi, les racines de  $su(2) \oplus u(1)$  sont un sous-ensemble de celles de  $su(3)$ . Ces caractéristiques définissent une sous-algèbre régulière. Les autres sous-algèbres maximales sont dites spéciales. Il existe en fait exactement une autre sous-algèbre  $su(2)$  maximale générée par  $2T_2, 2T_5$  et  $2T_7$  (ou de manière équivalente par  $2T_3, 2T_4$  et  $2T_5$ ). Elle a la caractéristique que la représentation fondamentale  $\mathbf{3}$  de  $su(3)$  est projetée sur la représentation  $\mathbf{3} (D_1)$  de  $su(2)$ , ce qui est typique des sous-algèbres spéciales.

Notez qu'une sous-algèbre d'une algèbre de Lie simple ne doit pas nécessairement être simple. Exemple :  $su(2) \supset u(1)$ .

#### Sous-algèbres maximales régulières

Une première manière d'obtenir une sous-algèbre maximale régulière est simplement de considérer le diagramme de Dynkin obtenu en enlevant un noeud du diagramme de Dynkin de l'algèbre. Le noeud enlevé correspondra à un générateur de Cartan qui commutera avec toute l'algèbre, donc un facteur  $u(1)$ . Dès lors, le système

de racines sera forcément un sous-système de celui de l'algèbre de départ. Comme le nombre de générateurs de Cartan ne change pas il s'agira d'une sous-algèbre maximale. Elle ne sera cependant pas semi-simple à cause du facteur  $u(1)$ .

Les sous-algèbres maximales régulières semi-simples peuvent être obtenues à partir d'un algorithme simple invoquant le diagramme des racines. L'algorithme général pour déduire les sous-algèbres maximales régulières des algèbres de Lie simple compactes est le suivant. Soit une algèbre de Lie simple compacte de rang  $n$  et son système de racines simples  $\{\alpha_i\}, i = 1, \dots, n$ . Ajoutons à cette liste la racine la plus petite  $\alpha_0$  qui peut être calculée explicitement. Ce système de racines est indécomposable<sup>1</sup> mais il n'est pas linéairement indépendant. Il y a exactement une relation linéaire entre les racines.

Puisque  $\alpha_0$  est la racine la plus petite,  $\alpha_0 - \alpha_i$  n'est pas une racine et donc

$$A_{0i} \equiv \frac{2\alpha_0 \cdot \alpha_i}{\alpha_0^2} \leq 0 \quad \text{et} \quad A_{i0} \equiv \frac{2\alpha_i \cdot \alpha_0}{\alpha_i^2} \leq 0. \quad (11.1)$$

par la formule fondamentale (7.40). D'après la discussion au chapitre 7.5, les quantités  $A_{0i}, A_{i0}$  peuvent prendre les valeurs  $0, -1, -2, -3$  mais aussi  $-4$  puisqu'il peut se faire que la racine  $\alpha_0$  soit l'opposé d'une racine simple. Ce cas particulier se produit en fait uniquement pour l'algèbre  $A_1 = su(2)$  qui n'admet que  $u(1)$  comme sous-algèbre maximale<sup>2</sup>.

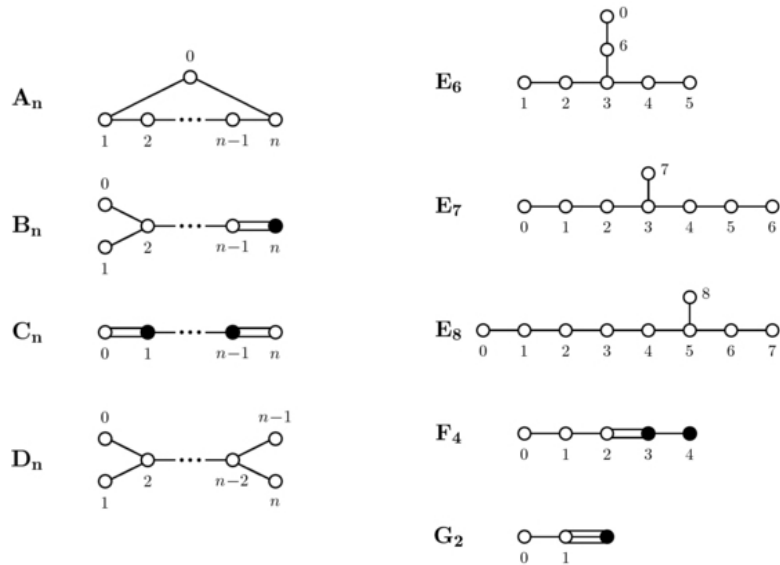
En posant  $A_{00} \equiv 2$ , on obtient une matrice de Cartan étendue  $\{A_{ij}\}_{i,j=0,\dots,n}$  avec des 2 en diagonale, des  $0, -1, -2, -3$  hors-diagonale et qui obéit à  $A_{ij} \neq 0 \Rightarrow A_{ji} \neq 0$ . Cette matrice de Cartan étendue définit un diagramme de Dynkin étendu selon les règles graphiques énoncées au chapitres précédents. Les diagrammes de Dynkin étendus résultants sont

Il est immédiat de dériver  $su(4) \supset su(2) \oplus su(2) \oplus u(1)$  et  $su(4) \supset su(3) \oplus u(1)$  en enlevant respectivement le noeud du milieu et le dernier noeud du diagramme de Dynkin de l'algèbre  $a_3 = su(4)$ .

1. En effet, la racine  $\alpha_0$  ne pourrait être orthogonale à toutes les racines simples puisque ces dernières forment une base.

2. Ce résultat peut se déduire par calcul direct à partir de (11.1) après avoir préalablement calculé la racine la plus petite.





Ici, on rappelle les égalités pour les algèbres  $B_2 = C_2$  et  $D_3 = A_3$ . Les diagrammes étendus génériques de  $B_n$  pour  $n = 2$  et de  $D_n$  pour  $n = 3$  ne sont pas définis mais les diagrammes étendus de  $C_2$  et  $A_3$  existent. Ce sont eux qui sont les diagrammes étendus des algèbres  $B_2$  et  $D_3$ .

Si on enlève une racine quelconque du système, on obtient un système de racines de rang maximal  $n$  qui obéit à deux des propriétés fondamentales  $A$  et  $B$  d'un diagramme de Dynkin énoncées au chapitre 7.10. Si la propriété  $C$  d'indécomposabilité est aussi vérifiée il s'agira d'une algèbre simple ; sinon elle sera une somme directe d'algèbres simples.

On voit immédiatement que  $su(n)$  n'admet pas de sous-algèbre semi-simple maximale car enlever un noeud quelconque du diagramme de Dynkin étendu nous ramène à l'algèbre  $su(n)$ . Dans le cas  $B_n = so(2n + 1)$ , enlever le noeud correspondant à la racine la plus courte à droite du diagramme donne  $D_n = so(2n)$  ce qui correspond bien à  $so(2n) \subset so(2n + 1)$ . Enlever un noeud au milieu de la chaîne de  $B_n$  mène à l'algèbre  $D_k \oplus B_{n-k}$ . On a donc  $so(2k) \oplus so(2n - 2k + 1) \subset so(2n + 1)$ . Les autres sous-algèbres se déduisent de manière similaire.

### 11.2 Sous-algèbres maximales des algèbres de Lie simples compactes

Les sous-algèbres maximales spéciales ne sont pas évidentes à déduire car leur générateurs de Cartan diffèrent de ceux de l'algèbre de départ. Elles peuvent se déduire de manière indirecte en comparant les représentations irréductibles de l'algèbre et de ses sous-algèbres

maximales spéciales. Nous ne le ferons pas ici.

La liste complète des sous-algèbres maximales régulières et spéciales des algèbres de Lie simples compactes est donnée ci-dessous pour toutes les algèbres de rang de 1 à 4 ainsi que pour les 5 algèbres exceptionnelles.

---

Rang 1

$$su(2) \simeq so(3) \simeq sp(2) \supset u(1) \quad (\mathbf{R})$$

Rang 2

$$\begin{aligned} su(3) &\supset su(2) \oplus u(1) && (\mathbf{R}) \\ &\supset su(2) && (\mathbf{S}) \\ so(5) \simeq sp(4) &\supset su(2) \oplus su(2); su(2) \oplus u(1) && (\mathbf{R}) \\ &\supset su(2) && (\mathbf{S}) \end{aligned}$$

Rappelons l'identité  $so(4) \simeq su(2) \oplus su(2)$ .

Rang 3

$$\begin{aligned} su(4) \simeq so(6) &\supset su(3) \oplus u(1); su(2) \oplus su(2) \oplus u(1) && (\mathbf{R}) \\ &\supset sp(4); su(2) \oplus su(2) && (\mathbf{S}) \\ so(7) &\supset su(4); su(2) \oplus su(2) \oplus su(2); sp(4) \oplus u(1) && (\mathbf{R}) \\ &\supset g(2) && (\mathbf{S}) \\ sp(6) &\supset su(3) \oplus u(1); su(2) \oplus sp(4) && (\mathbf{R}) \\ &\supset su(2); su(2) \oplus su(2) && (\mathbf{S}) \end{aligned}$$

Rang 4

$$\begin{aligned} su(5) &\supset su(4) \oplus u(1); su(2) \oplus su(3) \oplus u(1) && (\mathbf{R}) \\ &\supset sp(4) && (\mathbf{S}) \\ so(9) &\supset so(8); su(2) \oplus su(2) \oplus sp(4); su(2) \oplus su(4); so(7) \oplus u(1) && (\mathbf{R}) \\ &\supset su(2); su(2) \oplus su(2) && (\mathbf{S}) \\ sp(8) &\supset su(4) \oplus u(1); su(2) \oplus sp(6); sp(4) \oplus sp(4) && (\mathbf{R}) \\ &\supset su(2); su(2) \oplus su(2) \oplus su(2) && (\mathbf{S}) \\ so(8) &\supset su(2) \oplus su(2) \oplus su(2) \oplus su(2); su(4) \oplus u(1); && (\mathbf{R}) \\ &\supset su(3); so(7); su(2) \oplus sp(4) && (\mathbf{S}) \end{aligned}$$


---

---

$g(2)$	$\supset su(3); su(2) \oplus su(2)$	(R)
	$\supset su(2)$	(S)
$f(4)$	$\supset so(9); su(3) \oplus su(3); su(2) \oplus sp(6)$	(R)
	$\supset su(2); su(2) \oplus g(2)$	(S)
$e(6)$	$\supset so(10) \oplus u(1); su(2) \oplus su(6); su(3) \oplus su(3) \oplus su(3)$	(R)
	$\supset su(3); g(2); sp(8); f(4); su(3) \oplus g(2)$	(S)
$e(7)$	$\supset e(6) \oplus u(1); su(8); su(2) \oplus so(12); su(3) \oplus su(6)$	(R)
	$\supset su(2); su(2); su(3); su(2) \oplus su(2); su(2) \oplus g(2); su(2) \oplus f(4); g(2) \oplus sp(6)$	(S)
$e(8)$	$\supset so(16); su(5) \oplus su(5); su(3) \oplus e(6); su(2) \oplus e(7); su(9)$	(R)
	$\supset su(2); su(2); su(2); g(2) \oplus f(4); su(2) \oplus su(3); sp(4)$	(S)

---

Une application physique de ces décompositions en sous-algèbres est la suivante. On remarque que l'algèbre simple de plus bas rang qui contient l'algèbre du modèle standard des particules élémentaires  $su(3) \oplus su(2) \oplus u(1)$  est  $su(5)$ . Cela a encouragé Georgi et Glasgow à proposer en 1974 un modèle dit "de grande unification" des interactions fondamentales à hautes énergies basées sur le groupe  $SU(5)$  qui est spontanément brisé à basse énergie. De tels modèles prédisent la désintégration du proton à un taux qui dépend du modèle exact. A ce jour ces modèles n'ont été ni infirmés ni confirmés par l'expérience.



## *Bibliographie pour la partie groupes finis*

- James Humphreys, *A Course in Group Theory*, Oxford University Press, 1996
- James Humphreys, *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge Studies in advanced mathematics, 1990
- Pierre Ramond, *Group Theory : A Physicist's Survey*, Cambridge University Press, 2010
- J.F. Cornwell, *Group Theory in Physics*, Vol 1. et Vol 2., Academic Press - Elsevier, 1984
- M. Naimark et A. Stern, *Théorie des représentations des groupes*, Editions MIR, 1979
- S. Chatterjee, *Crystallography and the World of Symmetry*, Springer, 2008

**Outils informatiques :** L'Atlas des représentations des groupes finis contient des informations sur plus de 700 groupes d'ordre élevé.  
L'Atlas se trouve sur

<http://brauer.maths.qmul.ac.uk/Atlas/v3/>



## *Bibliographie pour la partie groupes de Lie*

- Howard Georgi, Lie Algebras in Particle Physics, Second Edition, Frontiers in Physics, Westview Press, 1999
- James Humphreys, Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, Springer, 1972
- Anthony Knapp, Lie Groups Beyond an Introduction, Second Edition, Birkhäuser, 2005
- Pierre Ramond, Group Theory : A Physicist's Survey, Cambridge University Press, 2010
- J.F. Cornwell, Group Theory in Physics, Vol 1. et Vol 2., Academic Press - Elsevier, 1984
- M. Naimark et A. Stern, Théorie des représentations des groupes, Editions MIR, 1979
- R. Slansky, Group theory for unified model building, Phys. Rep. 79 Issue 1, Elsevier, 1981

**Outils informatiques :** Le package LieART pour Mathematica publié par Robert Feger et Thomas Kephart en 2014 peut générer la plupart des quantités d'intérêt pour la théorie des groupes de Lie compacts et leurs représentations. Le programme peut être téléchargé sur [lieart.hepforge.org](http://lieart.hepforge.org) et le manuel est disponible sur [arxiv.org](http://arxiv.org) sous le numéro d'article arXiv :1206.6379.

