

COMPÈRE

PHYS-F485

REPRÉSENTATION
DES GROUPES ET
APPLICATION
À LA PHYSIQUE

Table des matières

1	Groupes finis	7
1.1	Notions élémentaires	7
1.2	Groupes finis d'ordre ≤ 4	9
1.3	Théorème de Cayley	10
1.4	Permutations S_n	12
1.5	Sous-groupe normal et groupe quotient	13
1.6	Groupe alterné A_n	16
1.7	Groupes simples et résolubles	17
2	Groupes cristallographiques ponctuels	21
2.1	Groupes cristallographiques ponctuels à deux dimensions	21
2.2	Groupes cristallographiques ponctuels à trois dimensions	23
3	Représentation des groupes finis	31
3.1	Notions élémentaires	31
3.2	Représentation régulière	33
3.3	Equivalence aux représentations unitaires et réductibilité	35
3.4	Relations d'orthogonalité	37
3.5	Théorèmes de Peter-Weyl et Burnside	39
3.6	Caractères des représentations irréductibles	42
3.7	Projecteurs sur sous-espace invariants	45
3.8	Décomposition d'une représentation quelconque en représentations irréductibles	47

4	<i>Système à trois ressorts et S_3</i>	53
4.1	<i>Représentations de S_3</i>	53
4.2	<i>Modes d'oscillation d'un système de 3 ressorts identiques</i>	58

*Je remercie vivement Marc Henneaux et Andrès
Collinucci pour avoir partagé leurs notes de cours
données aux années précédentes, ce qui a servi
comme base pour ces notes de cours.*

1

Groupes finis

Dans ce chapitre, quelques éléments de la théorie des groupes finis sera présenté. Il est impossible de présenter une classification succincte. Il a en effet fallu le travail d'une centaine de mathématiciens professionnels pour arriver à une telle classification seulement récemment (dans les années 1980). Nous nous contenterons donc une présentation d'éléments de théorie relevante pour tous les groupes, et de cas particuliers intéressants pour les applications en physique.

1.1 Notions élémentaires

Groupe Un **groupe** est un ensemble d'éléments muni d'une opération associative $\star : G \times G \rightarrow G$ avec un neutre et un inverse pour chaque élément. Plus précisément, (1) $\exists e \in G$ tel que $\forall g \in G, g \star e = e \star g = g$; (2) $\forall g \in G, \exists g^{-1} \in G$ tel que $g \star g^{-1} = e = g^{-1} \star g$; (3) $\forall g_1, g_2 \in G, g_1 \star g_2 \in G$.

Groupe abélien Un groupe G est **abélien** si pour tout $g_1, g_2 \in G, g_1 \star g_2 = g_2 \star g_1$.

Groupe fini Un **groupe fini** est un groupe avec un nombre fini d'éléments. L'ordre d'un groupe fini G est le nombre d'éléments du groupe. Il est dénoté $|G|$.

Remarques

- Le neutre est unique. En effet, si il existait deux neutres e_1 et e_2 , on aurait $e_1 \star g = g = e_2 \star g$ donc en multipliant par g^{-1} à droite, $e_1 = e_2$.
- L'inverse est unique. En effet, soit deux inverses i_1 et i_2 de g : $g \star i_1 = e = g \star i_2$. En multipliant par i_1 à gauche on trouve $i_1 = i_2$.

Nous omettrons l'opérateur \star par la suite pour simplifier la notation.

Exemples

- L'espace \mathbb{R} muni de l'addition, $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe infini-dimensionnel. De même pour $(\mathbb{Z}, +)$.
- L'espace \mathbb{R} muni de la multiplication n'est pas un groupe car 0 n'a pas d'inverse, mais $(\mathbb{R}^* \equiv \mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ est un groupe.
- L'ensemble $\mathbb{Z}_n \equiv \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$ muni de la multiplication telle que $a^n = e$ est un groupe fini appelé le **groupe cyclique** \mathbb{Z}_n . Il est abélien.
- S_n est le **groupe symétrique** de degré n . C'est le groupe fini de permutations de n objets. Il a $n!$ éléments.
- D_n ($n \geq 3$) est le **groupe diédral**. Il s'agit du groupe fini de symétries d'un n -gone régulier. Il a $2n$ éléments : l'identité, les n réflexions sur les axes de symétrie et $n - 1$ rotations autour du centre de $k \times 360^\circ / n$ degrés, $k = 1, \dots, n - 1$.
Soit r une rotation de $360^\circ / n$ degrés. On a $r^n = 1$. Soit s une des réflexions. On a $s^2 = 1$. Toute réflexion peut être obtenue par rotations successives de $s, r^k s, 0 \leq k \leq n - 1$. On note la propriété non-triviale : $rsr = s$ ou $srs^{-1} = r^{-1}$. Le groupe diédral admet donc la **présentation**

$$D_n = \{r, s \mid r^n = e, s^2 = e, srs^{-1} = r^{-1}\}. \quad (1.1)$$

Homomorphisme Soient G_1, G_2 deux groupes. Un **homomorphisme** ϕ de G_1 à G_2 est une application sur les ensembles $\phi : G_1 \mapsto G_2$ qui respecte les multiplications,

$$\forall g, h \in G_1 \quad \phi(g) *_2 \phi(h) = \phi(g *_1 h). \quad (1.2)$$

Exemples

- Le déterminant $\det : GL(n, \mathbb{C}) \mapsto \mathbb{C}^*$ défini par $M_{n \times n} \mapsto \det(M_{n \times n})$ satisfait à

$$\forall M_1, M_2 \in GL(n, \mathbb{C}) \quad \det(M_1 M_2) = \det(M_1) \det(M_2). \quad (1.3)$$

C'est donc un homomorphisme entre $GL(n, \mathbb{C})$ et (\mathbb{C}^*, \cdot) .

Isomorphisme Deux groupes sont **isomorphes** (ou dans la littérature mathématique : automorphes) quand il existe un homomorphisme entre ces groupes qui est bijectif. On notera deux groupes G_1, G_2 isomorphes par $G_1 \simeq G_2$.

Ordre d'un élément L'**ordre d'un élément** a d'un groupe fini G est le plus petit entier n tel que $a^n = e$.

Puisque le groupe est fini, l'ordre d'un élément existe toujours et est $\leq |G|$. En effet, soit $a \in G$. On considère la séquence a, a^2, a^3, \dots . Puisque le groupe est fini, il existe un $k > l$ tel que $a^k = a^l$ ou $a^{k-l} = e$. L'ordre est le plus petit tel $k - l$.

Sous-groupe Un **sous-groupe** H du groupe G est un sous-ensemble $H \subseteq G$ tel que $\forall h_1, h_2 \in H, h_1 h_2 \in H$. Un sous-groupe strict est défini similairement par un sous-ensemble strict $H \subset G$.

Par exemple, $(\mathbb{Z}, +) \subset (\mathbb{R}, +) \subset (\mathbb{C}, +)$.

Théorème 1.1 (Lagrange). *Pour tout sous-groupe H d'un groupe G , $|H|$ divise $|G|$.*

Démonstration. voir exercices ou Théorème 1.4. □

Produit direct Soient G, K deux groupes dont les éléments sont respectivement $\{g_a\}, a = 1, \dots, |G|$ et $\{k_i\}, i = 1, \dots, |K|$. Le **groupe produit direct** $G \times K$ d'ordre $|G||K|$ est défini par les éléments (g_a, k_i) et l'opération de groupe

$$(g_a, k_i) \star (g_b, k_j) = (g_a \star g_b, k_i \star k_j). \quad (1.4)$$

1.2 Groupes finis d'ordre ≤ 4

Le groupe d'ordre 2

Le premier élément est l'identité e et l'autre élément est a . La seule possibilité est la table de multiplication (aussi appelée table de Cayley) :

$$\begin{array}{c|cc} \hline \hline \mathbb{Z}_2 & e & a \\ \hline e & e & a \\ a & a & e \\ \hline \hline \end{array} \quad (1.5)$$

C'est le groupe \mathbb{Z}_2 . En physique, l'opération a peut être une transformation de parité, de renversement du temps, de rotation sur un axe, de conjugaison de charge électrique, etc.

Le groupe d'ordre 3

Le premier élément est l'identité e , le second élément est a_1 . Le troisième élément du groupe doit être $a_1 \star a_1$. Sinon $a_1 \star a_1 = a_1$ mène à $a_1 = e$, ou $a_1 \star a_1 = e$ ferme le groupe à deux éléments. Donc $a_2 \equiv a_1 \star a_1$ est le troisième élément. On a $a_1 \star a_2 = a_2 \star a_1$. La seule possibilité est $a_1 \star a_2 = e$. On trouve le groupe cyclique \mathbb{Z}_3 défini par sa table de multiplication

$$\begin{array}{c|ccc} \hline \hline \mathbb{Z}_3 & e & a_1 & a_2 \\ \hline e & e & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_1 & a_2 & e \\ a_2 & a_2 & e & a_1 \\ \hline \hline \end{array} \quad (1.6)$$

L'opération a_1 est par exemple une rotation du plan de 120° . Le groupe \mathbb{Z}_3 est abélien.

Les deux groupes d'ordre 4 (Exercice)

Il existe seulement deux groupes distincts d'ordre 4. Le premier est le groupe cyclique $\mathbb{Z}_4 = \{e, a_1, a_2, a_3\} = \{e, a, a^2, a^3\}$. On peut définir l'opération a par une rotation du plan de 90° . Sa table de multiplication est

\mathbb{Z}_4	e	a_1	a_2	a_3
e	e	a_1	a_2	a_3
a_1	a_1	a_2	a_3	e
a_2	a_2	a_3	e	a_1
a_3	a_3	e	a_1	a_2

(1.7)

Alternativement, le groupe \mathbb{Z}_4 est défini par l'opération

$$a : z \mapsto z' = iz$$

où $z \in \mathbb{C}$.

Le second groupe est le groupe V , *Vierergruppe* ou groupe de Klein. C'est un cas dégénéré D_2 du groupe diédral D_n , $n \geq 3$. Il possède la table de multiplication suivante

V	e	a_1	a_2	a_3
e	e	a_1	a_2	a_3
a_1	a_1	e	a_3	a_2
a_2	a_2	a_3	e	a_1
a_3	a_3	a_2	a_1	e

(1.8)

Il est abélien puisque sa table de multiplication est symétrique par rapport à sa diagonale. Le groupe est distinct de \mathbb{Z}_4 puisque que \mathbb{Z}_4 possède un élément d'ordre 4 tandis que V n'en possède pas. On peut réaliser ce groupe par les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Le groupe V contient trois sous-groupes isomorphes à \mathbb{Z}_2 qui sont générés respectivement par (e, a_1) , (e, a_2) et (e, a_3) . Puisque $a_1 \star a_2 = a_2 \star a_1$, les éléments des deux premiers \mathbb{Z}_2 commutent. De plus, $a_1 \star a_2 = a_2 \star a_1 = a_3$. On peut donc exprimer V comme le produit direct

$$V = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2. \quad (1.10)$$

En physique, ce groupe apparaît par exemple comme la symétrie sous P et T (renversement du temps et, indépendamment, parité).

1.3 Théorème de Cayley

Translations à gauche

Le groupe G agit naturellement sur lui-même. A chaque élément $h \in G$, on peut associer la transformation inversible

$$L_h : G \rightarrow G \quad g \mapsto L_h(g) = hg$$

appelée **translation à gauche par h** . De $L_{h_1 h_2}(g) = h_1 h_2 g = L_{h_1}(L_{h_2}(g))$, $L_e =$ transformation identique et $(L_h)^{-1} = L_{h^{-1}}$, on déduit que l'ensemble $\{L_h\}$ est un groupe et que l'application $h \rightarrow L_h$ est un homomorphisme. Cet homomorphisme est évidemment surjectif et injectif (si $L_h =$ transformation identique, alors $hg = g \forall g$ c-à-d $h = e$). Par conséquent, la correspondance $h \rightarrow L_h$ est un isomorphisme. On a démontré :

Théorème 1.2. *Tout groupe G est isomorphe au groupe des translations à gauche sur G .*

L'espace G est évidemment homogène pour les translations à gauche et le groupe G agit sur lui-même de manière simplement transitive :

$$\forall g_1, g_2 \in G \quad \exists h \in G : L_h g_1 = g_2 \quad (\text{transitivité})$$

(h est donné par $g_2 g_1^{-1}$) et

$$L_h g = g \Rightarrow hg = g \Rightarrow h = e$$

ce qui montre que le groupe de stabilité de n'importe quel point = $\{e\}$.

Translations à droite

On définit également les **translations à droite de G** comme

$$R_h(g) = gh^{-1}.$$

On a $R_{h_1 h_2}(g) = g(h_1 h_2)^{-1} = (gh_2^{-1})h_1^{-1} = R_{h_1}(R_{h_2}(g))$ et donc

$$R_{h_1 h_2} = R_{h_1} R_{h_2}$$

et par conséquent, l'application $h \mapsto R_h$ définit un homomorphisme de G dans le groupe des translations à droite, qui est en fait un isomorphisme. Il en résulte que G agit aussi à droite sur lui-même.

Notez que si on définissait $R_h(g) = gh$, la propriété d'homomorphisme (1.2) ne serait pas vérifiée.

Une application directe des considérations précédentes conduit au théorème de Cayley.

Théorème 1.3 (Théorème de Cayley). *Tout groupe fini G d'ordre n est isomorphe à un sous-groupe du groupe symétrique S_n .*

En effet, G est isomorphe au groupe des translations à gauche de G par G . Or, toute translation à gauche est une permutation des n éléments de G , donc G est isomorphe à un sous-groupe de S_n .

Le groupe symétrique S_n joue donc un rôle tout particulier dans l'étude des groupes finis. On voit également que le nombre de groupes finis d'ordre n distincts (à un isomorphisme près) est *fini* puisque le nombre de sous-ensembles à n éléments de l'ensemble fini S_n est fini.

1.4 Permutations S_n

Une permutation de n objets $1, 2, \dots, n$ les mélange dans un ordre différent a_1, a_2, \dots, a_n . La transformation $k \mapsto a_k, k = 1, \dots, n$ peut être représentée par le symbole

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Chaque permutation a un inverse et la permutation identique laisse tous les objets invariants. Les $n!$ permutations forment le groupe S_n .

Il existe une notation plus compacte et plus utile. On note $(a_1 a_2 \dots a_k)$ avec $k \leq n$ la permutation cyclique ou **cycle** qui envoie $a_1 \mapsto a_2, a_2 \mapsto a_3, \dots, a_k \mapsto a_1$ et laisse les autres objets inchangés,

$$(a_1 a_2 \dots a_k) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_k \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

Par définition, une **transposition** est un cycle de longueur 2.

Par exemple, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim (1\ 2\ 3\ 4). \quad (1.13)$$

Proposition 1.3.1. *Tout élément de S_n peut s'écrire comme un produit de cycles disjoints.*

Démonstration. Soit l'orbite sous permutation σ d'un objet $a, O_a \equiv \{a, \sigma(a), \sigma^2(a), \dots\}$. L'élément a a un ordre fini k donc l'orbite O_a est de longueur k . La permutation agit sur O_a comme un cycle de longueur k . On peut alors choisir un autre objet qui n'appartient pas à O_a et répéter la procédure plusieurs fois jusqu'à couvrir tous les objets par des orbites disjointes. Sur chaque orbite la permutation agit comme un cycle. La permutation se réduit donc à un produit de cycles disjoints. Chaque objet n'appartient qu'à un cycle. \square

Proposition 1.3.2. *Deux cycles disjoints de S_n commutent.*

Démonstration. Immédiat. Par définition, un cycle laisse le complément des objets permutés inchangé. \square

Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim (1\ 2)(3)(4) \sim (1\ 2). \quad (1.14)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim (1\ 2)(3\ 4). \quad (1.15)$$

Notez que les permutations $(1\ 2\ 3\ 4) \sim (2\ 3\ 4\ 1)$ sont identiques. Par convention, on dénote toujours la permutation avec l'élément le plus petit en premier; dans ce cas $(1\ 2\ 3\ 4)$.

Par commodité, on ne note par les cycles triviaux d'un objet. On note donc $(1\ 2)(3)(4) \sim (1\ 2)$.

Le groupe des permutations à trois éléments peut donc être noté

$$S_3 = \{e, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\} \quad (1.16)$$

Les produits et inverses sont donnés par

$$(1\ 2)^2 = (1\ 3)^2 = (2\ 3)^2 = e, \quad (1\ 2\ 3)^2 = (1\ 3\ 2), \quad (1.17)$$

$$(1\ 3\ 2)^2 = (1\ 2\ 3), \quad (1\ 2\ 3)^3 = (1\ 3\ 2)^3 = e, \quad (1.18)$$

$$(1\ 2\ 3)^{-1} = (1\ 3\ 2), \quad (1\ 2)(1\ 2\ 3) = (2\ 3), \dots \quad (1.19)$$

Nous utiliserons la convention selon laquelle les permutations agissent sur les objets par la droite :

$$(1\ 2)(1\ 2\ 3)1 = (1\ 2)2 = 1,$$

$$(1\ 2)(1\ 2\ 3)2 = (1\ 2)3 = 3,$$

$$(1\ 2)(1\ 2\ 3)3 = (1\ 2)1 = 2.$$

Donc $(1\ 2)(1\ 2\ 3) = (2\ 3)$. [C'est la convention utilisée par Humphreys mais opposée à celle de Ramond]

1.5 Sous-groupe normal et groupe quotient

Afin de déterminer plus en détail le contenu du groupe des permutations et ses sous-groupes, introduisons quelques notions utiles.

Classe latérale à gauche Soit G un groupe, $H \subseteq G$ un sous-groupe et $g \in G$. On appelle **classe latérale à gauche de g suivant H** l'ensemble

$$gH \equiv \{gh \mid h \in H\} \subseteq G. \quad (1.20)$$

La **classe latérale à droite de g suivant H** est définie similairement comme

$$Hg \equiv \{hg \mid h \in H\} \subseteq G. \quad (1.21)$$

Par exemple, soit $G = (\mathbb{Z}, +)$ et le sous-groupe

$$H \equiv n\mathbb{Z} = \{np \mid p \in \mathbb{Z}\} \quad (\text{muni de l'addition}).$$

On définit pour tout $r \in \mathbb{Z}$ les classes latérales à gauche

$$rH \equiv \{np + r \mid p \in \mathbb{Z}\}.$$

Explicitement, si

$$H = 2\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}.$$

Alors

$$1H = \{\dots, -3, -1, 1, 3, \dots\}.$$

Remarques

- Tout élément $g \in G$ appartient à une classe latérale à gauche et une classe latérale à droite. En effet, $g \in gH$ et $g \in Hg$ puisque $e \in H$.
- Si $g \in G$ appartient à deux classes latérales à droite (ou similairement à gauche) $g \in Hg_1$ et $g \in Hg_2$ alors $Hg_1 = Hg_2$.

Démonstration. $\exists h_1, h_2$ tels que $g = h_1g_1 = h_2g_2$. Donc $g_1 = h_1^{-1}h_2g_2 \in Hg_2$ et, de même, $g_2 \in Hg_1$. Donc $\forall l \in Hg_1, \exists h$ tel que $l = hg_1 = hh_1^{-1}h_2g_2$. Donc $l \in Hg_2$ et on a $Hg_1 \subseteq Hg_2$. De même, $Hg_2 \subseteq Hg_1$. \square

- Il en découle que les classes latérales Hg (ou gH) forment une partition de G : il existe un ensemble d'éléments g_1, \dots, g_N (qui ne sont pas uniques) tels que $G = \cup_{1 \leq i \leq N} Hg_i$.

Indice de H en G Soit G un groupe et H un sous-groupe de G . L'**indice** $(G : H)$ de H en G est le nombre de classes latérales à gauche distinctes d'éléments de G suivant H . On a $(G : 1) = |G|$.

Théorème 1.4 (Lagrange). On a $|G| = (G : H)|H|$. De plus, pour tout sous-groupes $K \subseteq H$ de G , on a $(G : K) = (G : H)(H : K)$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de l'existence d'une partition de G en classes latérales à gauche. \square

Sous-groupe normal Un sous-groupe $H \subseteq G$ est dit **normal** si ses classes latérales à gauche et à droite coïncident, $\forall g \in G, gH = Hg$. Dans ce cas, les classes latérales Hg définissent le **groupe quotient** G/H avec produit $(Hg_1)(Hg_2) \equiv H(g_1g_2)$. Le produit est bien défini car $(Hg_1)(Hg_2) = (H)(g_1H)g_2 = H(Hg_1)g_2 = Hg_1g_2$. L'**indice** du sous-groupe normal dans G est le nombre de classes latérales $|G|/|H|$.

Une seconde définition de sous-groupe normal peut être effectuée en utilisant la notion de conjugation suivante.

Conjugaison Soit g_a un élément d'un groupe G . On définit le **conjugué** de g_a par rapport à un autre élément $g \in G$ comme

$$\tilde{g}_a = g g_a g^{-1}. \tag{1.22}$$

Proposition 1.4.1. L'opération de conjugation d'un élément de G est un isomorphisme de G dans G .

Démonstration. Tout d'abord, il s'agit d'un homomorphisme puisque la table de multiplication est préservée : $g_a g_b = g_c$ implique $\tilde{g}_a \tilde{g}_b = \tilde{g}_c$. En effet,

$$\tilde{g}_a \tilde{g}_b = g g_a g^{-1} g g_b g^{-1} = g g_a g_b g^{-1} = g g_c g^{-1} = \tilde{g}_c.$$

L'homomorphisme admet un inverse puisque $g_a = g^{-1} \tilde{g}_a g$. Il est donc bijectif. \square

La conjugaison admet un rôle particulier pour le groupe S_n : elle préserve la structure de cycle comme montré dans la proposition suivante.

Proposition 1.4.2. Pour tout cycle (i_1, \dots, i_k) de S_n et toute permutation $\sigma \in S_n$, on a

$$\pi \equiv \sigma(i_1, \dots, i_k) \sigma^{-1} = (\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_k)). \tag{1.23}$$

Par exemple,

$$H = \{e, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\} \simeq \mathbb{Z}_3$$

est un sous-groupe de S_3 . La classe latérale à gauche et à droite de e suivant H est H lui-même. La classe latérale à gauche et à droite de $(1\ 2)$ suivant H est

$$(1\ 2)H = H(1\ 2) \equiv \{(1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)\}.$$

(Notez que $(1\ 2)H$ ne forme pas un sous-groupe.) Le sous-groupe \mathbb{Z}_3 est donc normal, et le groupe quotient est

$$S_3/\mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}_2 \simeq \{e, (1\ 2)\}.$$

Autre exemple. Le groupe $n\mathbb{Z}$ muni de l'addition est un sous-groupe normal de \mathbb{Z} . Le groupe quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est isomorphe au groupe cyclique \mathbb{Z}_n .

Démonstration. Par évaluation directe, on vérifie que la permutation π envoie $\sigma(i_1) \mapsto \sigma(i_2)$, $\sigma(i_2) \mapsto \sigma(i_3)$, ... et $\sigma(i_k) \mapsto \sigma(i_1)$. On vérifie ensuite que π ne déplace pas les objets a autres que $\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k)$. En effet, $\sigma^{-1}(a) \notin \{i_1, \dots, i_k\}$ donc $(i_1, \dots, i_k)\sigma^{-1}(a) = \sigma^{-1}(a)$ et finalement $\pi(a) = \sigma \cdot \sigma^{-1}(a) = a$. □

Éléments conjugués On dit que deux éléments $g_1, g_2 \in G$ d'un groupe sont **conjugués** s'il existe un $h \in G$ tel que $g_1 = hg_2h^{-1}$. On dénote alors $g_1 \sim g_2$.

Proposition 1.4.3. *La conjugaison \sim est une relation d'équivalence*

Démonstration. On prouve successivement les trois définitions d'une relation d'équivalence :

- $g \sim g$. Évident. Il suffit de choisir $h = e$.
- Si $g_1 \sim g_2$ alors $g_2 \sim g_1$. Soit h tel que $g_1 = hg_2h^{-1}$ alors $g_2 = h^{-1}g_1h = (h^{-1})g_1(h^{-1})^{-1}$.
- Si $g_1 \sim g_2$ et $g_2 \sim g_3$ alors $g_1 \sim g_3$. Soit $g_1 = h_1g_2h_1^{-1}$ et $g_2 = h_2g_3h_2^{-1}$. Alors $g_1 = h_1h_2g_3h_2^{-1}h_1^{-1} = h_1h_2g_3(h_1h_2)^{-1}$. □

Proposition 1.4.4. *Les cycles de même longueur de S_n sont conjugués*

Démonstration. Soient deux cycles de longueur k : $(a_1 \dots a_k)$ et $(b_1 \dots b_k)$. Définissons la permutation σ telle que $\sigma(a_i) = b_i$, $1 \leq i \leq k$ et telle que σ est une bijection quelconque du complément de $\{a_1 \dots a_k\}$ sur le complément de $\{b_1 \dots b_k\}$. Alors $\sigma(a_1, \dots, a_k)\sigma^{-1} = (b_1, \dots, b_k)$ par la proposition 1.4.2. □

On peut utiliser la conjugaison pour partitionner les éléments d'un groupe en sous-ensembles disjoints. Choisissons un élément g_1 et conjuguons-le par rapport à tous les éléments de G . On obtient la **classe de conjugaison** C_1 de g_1 ,

$$C_1 : \quad \tilde{g}_1 = gg_1g^{-1}, \quad \forall g \in G. \tag{1.24}$$

On peut ensuite choisir un nouvel élément g_2 qui n'est pas dans C_1 et former une nouvelle classe de conjugaison

$$C_2 : \quad \tilde{g}_2 = gg_2g^{-1}, \quad \forall g \in G. \tag{1.25}$$

Les éléments de C_1 et C_2 ne sont pas conjugués par construction. On peut continuer la procédure et puisque le groupe est fini, la procédure s'arrête après avoir trouvé k classes distinctes. La construction ne dépend pas du choix d'éléments g_1, g_2, \dots et le **nombre de classes de conjugaison** k est donc une caractéristique du groupe.

Pour S_3 , on a les relations de conjugaison

$$(12) \sim (13) \sim (23).$$

En effet,

$$(23) = (12)(13)(12),$$

$$(23) = (13)(12)(13)$$

et

$$(12) = (23)(13)(23).$$

Aussi, on a

$$(12) = (123)(12)(123)$$

et

$$(132) = (12)(123)(12).$$

On peut donc partitionner S_3 comme

$$S_3 = \{[e], [a_1a_2]_3 \text{ fois}, [a_1a_2a_3]_2 \text{ fois}\}.$$

Le nombre de classes de conjugaison de S_3 est donc 3.

Remarques L'élément neutre détermine toujours sa propre classe de conjugaison. Tout groupe abélien d'ordre n possède n classes distinctes.

Proposition 1.4.5. Soit $H \subseteq G$ un sous-groupe de G . Si le conjugué de chaque élément $h \in H$ par chaque élément $g \in G$ reste dans H , c'est-à-dire

$$\forall h \in H, \forall g \in G, \quad ghg^{-1} \in H$$

alors H est un **sous-groupe normal**.

Démonstration. Soient $g \in G$ et $h \in H$ quelconques. On dénote $h_2 = ghg^{-1} \in H$. On a donc $gh = h_2g$ et $hg^{-1} = g^{-1}h_2$. La première relation implique $gH \subseteq Hg$ et la deuxième implique $Hg^{-1} \subseteq g^{-1}H$. Puisque ces relations sont vraies pour tout g , on a aussi $Hg \subseteq gH$. Donc les classes latérales à gauche et à droite coïncident. \square

Si une union de classes de conjugaison forme un sous-groupe, ce sous-groupe forme donc automatiquement un sous-groupe normal.

1.6 Groupe alterné A_n

Proposition 1.4.6. Tout cycle peut être décomposé en un produit de transpositions,

$$(a_1 \dots a_k) = (a_1 a_k)(a_1 a_{k-1}) \cdots (a_1 a_2). \tag{1.26}$$

Démonstration. On vérifie que les deux membres de l'équation permutent tous les objets de manière identique. \square

Corollaire 1.4.1. Toute permutation peut s'écrire comme un produit de transpositions.

Démonstration. C'est une conséquence des propositions 1.3.1 et 1.4.6. \square

A chaque permutation de S_n on peut associer une matrice $n \times n$ inversible (composées de zéros et de n 1) qui agit sur un vecteur d'objets de longueur n . Cette isomorphisme réalise S_n comme un sous-groupe de $GL(n, \mathbb{R})$. S_n peut être défini comme le groupe de telles matrices. Une transposition est associée à une matrice de déterminant -1 . Comme le déterminant est un homomorphisme et par le corollaire 1.4.1, le déterminant d'une matrice quelconque de S_n est soit 1, soit -1 . Ce nombre est appelé le **signe de la permutation** σ et est dénoté $\text{sgn}(\sigma)$. Une manière simple d'obtenir le signe d'une permutation consiste à la décomposer en produits de transpositions et compter le nombre de transpositions modulo 2. Ce nombre est unique pour toute décomposition en transpositions car le déterminant d'une matrice comme produit de matrices est unique.

Revenons encore sur le sous-groupe de S_3 ,

$$\mathbb{Z}_3 = \{e, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$

qui est l'union des deux classes de conjugaisons $[e] = \{e\}$ et $[123] = \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$. On a

$$(1\ 2)(1\ 2\ 3)(1\ 2) = (1\ 3\ 2)$$

ainsi que les relations similaires obtenues par permutations des indices. La conjugaison d'éléments de \mathbb{Z}_3 par S_3 préserve \mathbb{Z}_3 et donc \mathbb{Z}_3 est un sous-groupe normal.

Sans perte de généralité, une transposition des deux premiers objets est associée à

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Groupe alterné Le **groupe alterné** A_n est défini comme

$$A_n = \{\sigma \in S_n \mid \text{sgn}(\sigma) = 1\}. \quad (1.27)$$

Propriétés

- Son ordre est $|A_n| = \frac{1}{2}n!$ pour tout $n \geq 2$. En effet, soit $\tau = (1\ 2) \notin A_n$. Si $\sigma \notin A_n$ alors $\sigma\tau \in A_n$. Donc σ fait partie de la classe latérale à droite $\sigma \in A_n\tau$. On déduit $S_n = A_n \cup A_n\tau$ avec $A_n \cap A_n\tau = \emptyset$.
- A_n est non-abélien pour $n \geq 4$. En effet, il contient les 3-cycles. Or $(1\ 2\ 3)(1\ 2\ 4)$ envoie $4 \mapsto 2$ tandis que $(1\ 2\ 4)(1\ 2\ 3)$ envoie $4 \mapsto 1$.
- Pour tout groupe fini G , on définit la représentation alternée comme l'application linéaire de G dans \mathbb{R} qui envoie $g \in \mathbb{R}$ dans $\text{sgn}(\sigma(g))$ où $\sigma(g)$ est la permutation associée à g lorsque G est compris comme un sous-groupe des permutations. La représentation alternée d'un groupe fini est donc toujours définie.

Par exemple,

$$S_2 = \{e, (1\ 2)\} \supset A_2 = \{e\}.$$

Aussi,

$$A_3 = \{e, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\} \simeq \mathbb{Z}_3.$$

1.7 Groupes simples et résolubles

Les concepts de groupe simple et de groupe résoluble ont été introduit par Galois, le père fondateur de la théorie des groupes.

Groupe simple Un groupe est **simple** s'il ne possède pas de sous-groupe normal **non-trivial** (c'est-à-dire l'identité ou lui-même).

Un exemple de groupe simple est le groupe cyclique \mathbb{Z}_p où p est un nombre premier.

Par contre le groupe $\mathbb{Z}_4 = \{e, a, a^2, a^3\}$ est n'est pas simple. Il admet $\mathbb{Z}_2 = \{e, a^2\}$ comme groupe normal. En effet, $a\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2a = \{a, a^3\}$ et $\mathbb{Z}_4 = \mathbb{Z}_2 \cup a\mathbb{Z}_2$.

Groupe résoluble Un groupe G est **résoluble** s'il existe une série de sous-groupes normaux G_i

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots \supseteq G_r = \{e\} \quad (1.28)$$

tels que tous les groupes quotients $G_0/G_1, G_1/G_2, \dots, G_{r-1}/G_r$ sont abéliens.

Galois a montré que la solution d'un polynôme général de degré n en radicaux était possible seulement si le groupe S_n qui agit sur les racines était résoluble. Pour $n = 3$ on a

$$S_3 \supset A_3 \supset \{e\} \quad (1.29)$$

avec $S_3/A_3 \simeq \mathbb{Z}_2$ et $A_3 \simeq \mathbb{Z}_3$. Pour $n = 4$ on a

$$S_4 \supset A_4 \supset V \supset \{e\} \quad (1.30)$$

Notez que l'on a aussi $S_3 \supset S_2 \supset \{e\}$ mais S_2 n'est pas un sous-groupe normal de S_3 car $(123)(12)(132) = (23)$ et pas (12) .

avec $S_4/A_4 = \mathbb{Z}_2$, $A_4/V = \mathbb{Z}_3$ et $V \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Donc S_3 et S_4 sont résolubles et un polynôme d'ordre 3 ou 4 admet une solution en radicaux.

Par contre, Galois a montré que A_5 est un groupe simple. Comme c'est un groupe non-abélien, il est non-résoluble. Cela implique qu'il n'y a pas de solution en radicaux d'un polynôme d'ordre 5 en général (mais il peut y en avoir pour des cas particuliers).

Tous les groupes finis peuvent être construits à partir des groupes simples. La classification des groupes simples a requis le travail d'une centaine de mathématiciens et la classification s'est achevée seulement au début des années 1980. Les groupes simples peuvent être catégorisés en 18 familles infinies et une liste de 26 cas particuliers :

- Les groupes cycliques \mathbb{Z}_p d'ordre p premier
- Les groupes alternés A_n , $n \geq 5$
- Les 16 familles de groupes finis de type Lie (pas définis dans ce cours)
- Les 26 groupes finis sporadiques (pas définis dans ce cours)

Pour le plaisir, on note que le plus grand des groupes sporadiques est connu sous le nom *Groupe monstre M* et admet

$$2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71 \approx 8 \times 10^{53}$$

éléments.

Pour illustrer l'étendue et la complexité de la classification des groupes finis, les deux tables 1.1 et 1.2 sont données, tirées du livre de P. Ramond "Group theory".

FIGURE 1.1: Liste des groupes finis d'ordre 12 ou moins. Les groupes non-abéliens sont indiqués avec une astérisque.

Table 2.1. *Finite groups of lowest order*

Order	Group	Isomorphism	Type
2	Z_2		Cyclic
3	Z_3		Cyclic
4	Z_4		Cyclic
4	D_2	$Z_2 \times Z_2$	Dihedral, Klein's four-group
5	Z_5		Cyclic
6	Z_6	$Z_3 \times Z_2$	Cyclic
6*	D_3	S_3	Dihedral, permutation
7	Z_7		Cyclic
8	Z_8		Cyclic
8	$Z_4 \times Z_2$		
8	$Z_2 \times Z_2 \times Z_2$	$D_2 \times Z_2$	
8*	D_4		Dihedral
8*	Q	Q_4	Quaternion, dicyclic
9	Z_9		Cyclic
9	$Z_3 \times Z_3$		
10	Z_{10}	$Z_5 \times Z_2$	Cyclic
10*	D_5		Dihedral
11	Z_{11}		Cyclic
12	Z_{12}	$Z_4 \times Z_3$	Cyclic
12	$Z_6 \times Z_2$	$D_2 \times Z_3$	
12*	D_6	$D_3 \times Z_2$	Dihedral
12*	Q_6		Dicyclic, binary dihedral
12*	T	A_4	Tetrahedral, alternating

FIGURE 1.2: Nombre de groupes d'ordre 200 ou moins. Le nombre de groupes abéliens sont indiqués entre crochets.

Table 2.2. *Number of groups of order up to 200*

Order	$N[N_{Abel}]$	Order	$N[N_{Abel}]$	Order	$N[N_{Abel}]$	Order	$N[N_{Abel}]$	Order	$N[N_{Abel}]$
1	1 [1]	41	1 [1]	81	15 [5]	121	2 [2]	161	1 [1]
2	1 [1]	42	6 [1]	82	2 [1]	122	2 [1]	162	55 [5]
3	1 [1]	43	1 [1]	83	1 [1]	123	1 [1]	163	1 [1]
4	2 [2]	44	4 [2]	84	15 [2]	124	4 [2]	164	5 [2]
5	1 [1]	45	2 [2]	85	1 [1]	125	5 [3]	165	2 [1]
6	2 [1]	46	2 [1]	86	2 [1]	126	16 [2]	166	2 [1]
7	1 [1]	47	1 [1]	87	1 [1]	127	1 [1]	167	1 [1]
8	5 [3]	48	52 [5]	88	12 [3]	128	2328 [15]	168	57 [3]
9	2 [2]	49	2 [2]	89	1 [1]	129	2 [1]	169	2 [2]
10	2 [1]	50	2 [2]	90	10 [2]	130	4 [1]	170	4 [1]
11	1 [1]	51	1 [1]	91	1 [1]	131	1 [1]	171	5 [2]
12	5 [2]	52	5 [2]	92	4 [2]	132	10 [2]	172	4 [2]
13	1 [1]	53	1 [1]	93	2 [1]	133	1 [1]	173	1 [1]
14	2 [1]	54	15 [3]	94	2 [1]	134	2 [1]	174	4 [1]
15	1 [1]	55	2 [1]	95	1 [1]	135	5 [3]	175	2 [2]
16	14 [5]	56	13 [3]	96	230 [7]	136	15 [3]	176	42 [5]
17	1 [1]	57	2 [1]	97	1 [1]	137	1 [1]	177	1 [1]
18	5 [2]	58	2 [1]	98	5 [2]	138	4 [1]	178	2 [1]
19	1 [1]	59	1 [1]	99	2 [2]	139	1 [1]	179	1 [1]
20	5 [2]	60	13 [2]	100	16 [4]	140	11 [2]	180	37 [4]
21	2 [1]	61	1 [1]	101	1 [1]	141	1 [1]	181	1 [1]
22	2 [1]	62	2 [1]	102	4 [1]	142	2 [1]	182	4 [1]
23	1 [1]	63	4 [2]	103	1 [1]	143	1 [1]	183	2 [1]
24	15 [3]	64	267 [11]	104	14 [3]	144	197 [10]	184	12 [3]
25	2 [2]	65	1 [1]	105	2 [1]	145	1 [1]	185	1 [1]
26	2 [1]	66	4 [1]	106	2 [1]	146	2 [1]	186	6 [1]
27	5 [3]	67	1 [1]	107	1 [1]	147	6 [2]	187	1 [1]
28	4 [2]	68	5 [2]	108	45 [6]	148	5 [2]	188	4 [2]
29	1 [1]	69	1 [1]	109	1 [1]	149	1 [1]	189	13 [3]
30	4 [1]	70	4 [1]	110	6 [1]	150	13 [2]	190	4 [1]
31	1 [1]	71	1 [1]	111	2 [1]	151	1 [1]	191	1 [1]
32	51 [7]	72	50 [6]	112	43 [5]	152	12 [3]	192	1543 [11]
33	1 [1]	73	1 [1]	113	1 [1]	153	2 [2]	193	1 [1]
34	2 [1]	74	2 [1]	114	6 [1]	154	4 [1]	194	2 [1]
35	1 [1]	75	3 [2]	115	1 [1]	155	2 [1]	195	2 [1]
36	14 [4]	76	4 [2]	116	5 [2]	156	18 [2]	196	17 [4]
37	1 [1]	77	1 [1]	117	4 [2]	157	1 [1]	197	1 [1]
38	2 [1]	78	6 [1]	118	2 [1]	158	2 [1]	198	10 [2]
39	2 [1]	79	1 [1]	119	1 [1]	159	1 [1]	199	1 [1]
40	14 [3]	80	52 [5]	120	47 [3]	160	238 [7]	200	52 [6]

2

Groupes cristallographiques ponctuels

Groupe cristallographique On dit qu'un groupe est **cristallographique** s'il préserve un réseau. Un réseau R de l'espace \mathbb{R}^n est par définition l'ensemble de tous les vecteurs combinaisons linéaires à coefficients entiers de n vecteurs linéairement indépendants \mathbf{a}_i ($i = 1, \dots, n$),

$$\mathbf{x} \in R \Leftrightarrow \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n z_i \mathbf{a}_i, \quad z_i \in \mathbb{Z}. \quad (2.1)$$

Il existe 17 groupes cristallographiques du plan et 230 groupes cristallographiques de l'espace Euclidien à 3 dimensions. Nous ne le prouverons pas ici.

Groupe cristallographique ponctuel On appelle **groupe cristallographique ponctuel** à n dimensions tout sous-groupe cristallographique fini de $O(n)$.

Nous allons établir la classification des groupes cristallographiques ponctuels à 2 dimensions et dériver une partie de la classification à 3 dimensions. Il existe 10 groupes cristallographiques ponctuels du plan et 32 groupes cristallographiques ponctuels de l'espace Euclidien à 3 dimensions.

2.1 Groupes cristallographiques ponctuels à deux dimensions

Sous-groupes finis de $SO(2)$

Les éléments de $SO(2)$ sont les rotations du plan autour de l'origine. Nous aurons besoin du lemme suivant de la théorie des nombres :

Lemme 2.1 (Bézout). Soient a et b deux entiers de plus grand diviseur commun d . Alors il existe $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $ax + by = d$. En particulier, si a et b sont premiers entre eux, il existe $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $ax + by = 1$.

Note historique : en 1891, Fedorov et indépendamment Schönflies ont classifié ces groupes avec quelques omissions et duplications. Après une correspondance, ils sont arrivés à la liste finale des 230 groupes en 1892.

Il existe deux notations pour les 32 groupes cristallographiques ponctuels à $3d$: celle de Schönflies utilisée en spectroscopie moléculaire, et celle de Hermann-Mauguin utilisée en cristallographie.

Démonstration du Lemme 2.1 : considérons les entiers positifs de la forme $aw + bz, w, z \in \mathbb{Z}$. Soit e le plus petit de ces nombres, $e = xa + yb > 0$. La division de a par e donne $a = qe + r$, où le reste r est compris entre 0 et e , $0 \leq r < e$. Substituant $e = xa + yb$, on trouve $r = a(1 - qx) - bxy$ et donc r est de la forme $aw + bz, w, z \in \mathbb{Z}$. Comme $r < e$, ceci implique $r = 0$ car e est le plus petit nombre positif de cette forme. Par conséquent, e divise a . De même, e divise b . Enfin, soit c un diviseur commun de a et b . Alors c divise $e = xa + yb$. Il en résulte que $e = d$ est le plus grand diviseur commun de a et de b .

Proposition 2.1.1. *Tout sous-groupe fini de $SO(2)$ est isomorphe à un des groupes cycliques C_p , $p \in \mathbb{Z}_0$. Ces groupes sont les groupes des rotations préservant un polygone régulier à p côtés.*

Démonstration. Si G est un sous-groupe non trivial de $SO(2)$, alors G contient une rotation non triviale d'angle minimum, soit $R(\varphi)$. Si G est fini, on a $R^p = I$ pour un certain entier p et donc φ est égal à $\frac{k}{p}(2\pi)$ où k et p sont des entiers que l'on peut supposer positifs et premiers entre eux. On prétend que $k = 1$. En effet, par le lemme de Bézout, il existe $z, z' \in \mathbb{Z}$ tels que $kz - pz' = 1$. Autrement dit, il existe (au moins) un multiple de $\frac{k}{p}$ qui diffère de $\frac{1}{p}$ par un entier. Ceci montre que G contient la rotation d'angle $\frac{1}{p}(2\pi)$, et comme $\frac{k}{p}(2\pi)$ est le plus petit angle de rotation dans G , on a $k = 1$.

Soit $R(\varphi')$ un élément de G . L'angle φ' est nécessairement un multiple de $\frac{1}{p}(2\pi)$; dans le cas contraire, il y aurait une rotation d'angle plus petit que $\frac{1}{p}(2\pi)$ dans G , contrairement aux hypothèses. Donc, G est le groupe cyclique C_p contenant les rotations d'angle $\frac{k}{p}(2\pi)$, $k = 0, 1, \dots, p - 1$. Il y a une infinité de sous-groupes finis de $SO(2)$, caractérisés par un entier positif p . □

Le groupe cyclique Z_p est habituellement noté C_p lorsqu'il réfère aux rotations discrètes du plan.

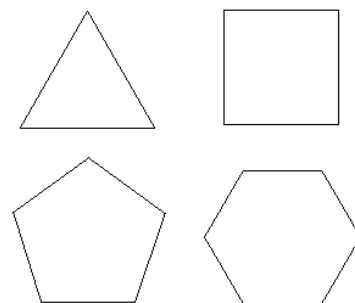
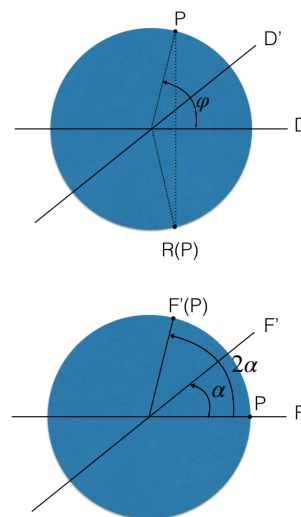


FIGURE 2.1: Les premiers polygones réguliers.

Sous-groupes finis de $O(2)$

On obtient les sous-groupes finis de $O(2)$ en ajoutant des réflexions aux groupes C_p . Le produit de la réflexion par rapport à la droite D passant par l'origine et de la rotation d'angle φ est la réflexion par rapport à la droite D' faisant un angle $\varphi/2$ avec D (et passant aussi par l'origine).

D'autre part, le produit des réflexions par rapport aux droites F et F' faisant un angle α est la rotation d'angle 2α . Il en découle que les sous-groupes finis de $O(2)$ contenant des réflexions s'obtiennent en ajoutant à C_p p réflexions par rapport à p droites faisant un angle $\frac{\pi}{p}$. Les groupes correspondants sont appelés groupes diédraux d'ordre $2p$ et notés D_p . Ce sont les groupes de symétries complets des polygones réguliers.



Remarque 2.2. *Le plan Π sur lequel agit $O(2)$ peut être plongé dans l'espace à trois dimensions. Les groupes C_p et D_p peuvent alors être vus comme sous-groupes finis de $SO(3)$. C'est évident pour C_p dont les éléments peuvent être vus comme des rotations autour de l'axe perpendiculaire au plan Π passant par l'origine; on dit que cet axe est un axe d'ordre p . C'est aussi vrai pour D_p si on voit les réflexions planaires par rapport à la droite D de Π comme une rotation d'espace d'angle π autour de D . Le groupe diédral D_p contient donc un axe d'ordre p et p axes d'ordre deux. A noter que vus comme sous-groupes de $SO(3)$, les groupes C_2 et D_1 sont équivalents (un seul axe d'ordre 2 dans les deux cas).*

Groupes cristallographiques ponctuels à deux dimensions

Soit un réseau R comme défini en (2.1) Les seuls axes permis pour un groupe cristallographique sont d'ordre $p = 1, 2, 3, 4, 6$. En effet, une condition nécessaire pour que la rotation d'angle $\frac{2\pi}{p}$ préserve R est que sa trace soit un entier¹. La trace de la matrice de rotation $R(\varphi)$ est égale à $2 \cos \varphi$. Il faut donc

$$2 \cos\left(\frac{2\pi}{p}\right) \in \mathbb{Z}.$$

Ceci donne comme possibilités

$$2 \cos\left(\frac{2\pi}{p}\right) = \pm 2, \pm 1, 0$$

correspondant aux cas $p = 1, 2, 6, 3, 4$ annoncés. La condition nécessaire est aussi suffisante (à deux dimensions). Nous avons donc prouvé qu'il y a dix groupes cristallographiques ponctuels à deux dimensions : C_p, D_p ($p = 1, 2, 3, 4, 6$).

Par exemple, $C_1 \equiv \{I\}$ préserve un réseau arbitraire, $D_1 \simeq \mathbb{Z}_2$, $C_2, D_2 \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, C_4 et D_4 préservent les réseaux carrés (vecteurs de base \mathbf{a}_1 et \mathbf{a}_2 de même norme et orthogonaux), tandis que C_3, D_3, C_6 et D_6 préservent les réseaux hexagonaux (vecteurs de base \mathbf{a}_1 et \mathbf{a}_2 de même norme et formant un angle de 120°).

2.2 Groupes cristallographiques ponctuels à trois dimensions

On appelle groupe cristallographique ponctuel à trois dimensions tout sous-groupe cristallographique fini de $O(3)$.

Polyèdres réguliers

Classification Plusieurs groupes cristallographiques sont liés aux polyèdres réguliers (ou "solides de Platon"). Nous allons d'abord décrire ces polyèdres et leur groupe de symétrie.

Un polyèdre régulier est un polyèdre dont toutes les faces sont des polygones réguliers identiques et dont tous les sommets sont entourés par le même nombre de faces. Si p est le nombre de côtés du polygone régulier qui intervient dans le polyèdre et q le nombre de faces qui entourent un sommet, on note le polyèdre $\{p, q\}$. Bien entendu, $p > 2$ et $q > 2$. Dans le plan, il existe une infinité de polygones réguliers. Les polyèdres réguliers sont par contre en nombre fini.

L'angle formé par les côtés adjacents d'un polygone régulier à p côtés est égal à $\pi(1 - \frac{2}{p})$. A un sommet du polyèdre régulier $\{p, q\}$ se rencontrent q tels polygones et la somme des angles des faces qui se

1. La trace de la matrice d'une transformation ne dépend pas de la base. Dans une base adaptée au réseau, où les vecteurs de base sont $\{\mathbf{a}_n\}$, la matrice d'une transformation qui préserve le réseau est à coefficients entiers, donc sa trace est entière.

rejoignent est strictement inférieure à 2π . Donc, on a $q\pi(1 - \frac{2}{p}) < 2\pi$ ou encore

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} > \frac{1}{2} \tag{2.2}$$

Les seules solutions sont

$$\begin{aligned} &\{3,3\} \\ &\{3,4\}, \{4,3\} \\ &\{3,5\}, \{5,3\} \end{aligned}$$

Le premier cas correspond au tétraèdre régulier. Les deuxième et troisième cas correspondent à l'octaèdre et au cube. Les quatrième et cinquième cas correspondent à l'icosaèdre et au dodécaèdre.

Ces polyèdres réguliers ont des nombres de faces (N_2), arêtes (N_1) et sommets (N_0) donnés par

$$\text{Tétraèdre } \{3,3\} \quad N_0 = 4 \quad N_1 = 6 \quad N_2 = 4 \tag{2.3}$$

$$\text{Octaèdre } \{3,4\} \quad N_0 = 6 \quad N_1 = 12 \quad N_2 = 8 \tag{2.4}$$

$$\text{Cube } \{4,3\} \quad N_0 = 8 \quad N_1 = 12 \quad N_2 = 6 \tag{2.5}$$

$$\text{Icosaèdre } \{3,5\} \quad N_0 = 12 \quad N_1 = 30 \quad N_2 = 20 \tag{2.6}$$

$$\text{Dodécaèdre } \{5,3\} \quad N_0 = 20 \quad N_1 = 30 \quad N_2 = 12 \tag{2.7}$$

On obtient ces nombres par inspection. A noter que

$$N_2 - N_1 + N_0 = 2 \quad (\text{formule d'Euler}). \tag{2.8}$$

On a également pour tout polyèdre régulier $\{p, q\}$,

$$qN_0 = 2N_1 = pN_2 \tag{2.9}$$

En effet, le nombre N_1 d'arêtes est égal au nombre N_0 de sommets fois q (car de tout sommet part q arêtes) divisé par 2 (car ce faisant, on compte chaque arête deux fois). De même, N_1 est aussi égal au nombre N_2 de faces fois p (car chaque face contient p arêtes) divisé par 2 (car chaque arête appartient à deux faces).

Groupes des polyèdres On appelle groupe du polyèdre $\{p, q\}$ le sous-groupe (fini) $R_{\{p,q\}}$ de $SO(3)$ qui laisse le polyèdre $\{p, q\}$ invariant. Si un axe de rotation de $R_{\{p,q\}}$ (passant par le centre du polyèdre) passe par l'intérieur d'une face, il doit nécessairement passer par le centre de celle-ci et il doit être d'ordre p . De même, si un axe de rotation passe par l'intérieur d'une arête, il doit nécessairement passer par le milieu de celle-ci il doit être d'ordre 2. Enfin, un axe de rotation passant par un sommet doit être d'ordre q . Il y a donc $N_0/2$ axes d'ordre q , $N_1/2$ axes d'ordre 2 et $N_2/2$ axes d'ordre p . En fait,

$$R_{\{p,q\}} = R_{\{q,p\}} \tag{2.10}$$

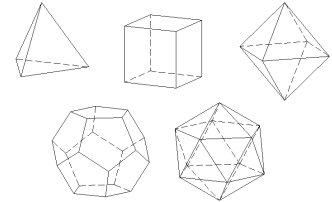


FIGURE 2.2: Les polyèdres réguliers (tétraèdre, cube, octaèdre, dodécaèdre et icosaèdre)

puisque l'on peut placer un cube dans l'octaèdre en inversant les axes de symétrie des faces et des sommets. La même relation est vraie entre l'icosaèdre et le dodécaèdre.

Comptons maintenant l'ordre du groupe. Pour chaque sommet, on a $q - 1$ rotations ; pour chaque arête, on a une rotation ; et pour chaque face, on a $p - 1$ rotations (en excluant chaque fois l'identité). Mais sommets, arêtes et faces viennent par paires antipodales, sauf pour le tétraèdre, où chaque sommet est opposé à une face. Dans tous les cas, le nombre total de rotations (excluant l'identité) est égal à

$$\frac{1}{2}[N_0(q - 1) + N_1 + N_2(p - 1)] = \frac{1}{2}(N_0q - 2 + N_2p) = 2N_1 - 1$$

par (2.8) et (2.9). Par conséquent, l'ordre de $R_{\{p,q\}} = R_{\{q,p\}}$ est $2N_1$.

Le groupe $R_{\{3,3\}}$ du tétraèdre est d'ordre 12, celui de l'octaèdre (ou du cube) est d'ordre 24 et celui de l'icosaèdre (ou du dodécaèdre) est d'ordre 60. On note souvent

$$T \equiv R_{\{3,3\}}, \tag{2.11}$$

$$O \equiv R_{\{3,4\}} = R_{\{4,3\}}, \tag{2.12}$$

$$Y \equiv R_{\{3,5\}} = R_{\{5,3\}}. \tag{2.13}$$

Les seuls axes permis pour un groupe cristallographique sont d'ordre $p = 1, 2, 3, 4, 6$ (même argument qu'à 2 dimensions). Donc, seuls T et O sont cristallographiques.

IO(n) et réflexions

On appelle groupe euclidien inhomogène $IO(n)$ le groupe des isométries de l'espace euclidien \mathbb{R}^n . Ce groupe contient les translations, les rotations et les réflexions par rapport à un hyperplan quelconque, ainsi que leurs produits. Le sous-groupe $ISO(n)$ des **déplacements** ne contient que les isométries préservant l'orientation et est engendré par les translations et les rotations.

Théorème 2.3. *Toute transformation de $IO(n)$ peut s'écrire comme un produit fini de réflexions. Celles-ci engendrent donc tout $IO(n)$.*

Démonstration. La translation par \mathbf{a} est égale au produit de la réflexion par rapport à l'hyperplan perpendiculaire à \mathbf{a} passant par l'origine et de la réflexion par rapport à l'hyperplan parallèle passant par $\mathbf{a}/2$. Ceci ramène le problème à écrire un élément quelconque de $O(n)$ comme produit de réflexions. On raisonne par récurrence sur la dimension : la propriété est vraie pour $n = 2$ car toute rotation du plan d'angle φ est égale au produit de deux réflexions par rapport à des droites faisant un angle $\varphi/2$. D'autre part, si la propriété est vraie en dimension n , elle est aussi vraie en dimension $n + 1$: soit A un

Les groupes complets de symétrie des polyèdres réguliers s'obtiennent en ajoutant les réflexions.

Une réflexion autour de l'origine est donnée par

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} - 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$$

où \mathbf{n} est le vecteur de norme 1 orthogonal à l'hyperplan de réflexion (l'ambiguïté de signe de \mathbf{n} ne joue pas).

élément de $O(n+1)$. On a $E_{n+1} = E_n \oplus \mathbb{R}\mathbf{e}_{n+1}$. Si $A\mathbf{e}_{n+1} = \mathbf{e}_{n+1}$, A est en fait un élément de $O(n)$ et il n'y a rien à montrer par l'hypothèse de récurrence. Sinon, les deux vecteurs \mathbf{e}_{n+1} et $A\mathbf{e}_{n+1}$ forment un plan et sont reliés par un élément de $SO(2)$. Il sont donc reliés entre eux par un produit de deux réflexions $S \equiv R_1R_2$ que l'on peut choisir orthogonaux au plan, $\mathbf{e}_{n+1} = SA\mathbf{e}_{n+1}$. La transformation SA laisse \mathbf{e}_{n+1} fixe et définit donc un élément de $O(n)$. Par l'hypothèse de récurrence, on peut écrire cet élément comme un produit de k réflexions S_i de E_n , que l'on peut étendre à E_{n+1} en posant $S_i\mathbf{e}_{n+1} = \mathbf{e}_{n+1}$ (ce qui revient à prendre pour hyperplan de réflexion dans E_{n+1} l'hyperplan $H_i \oplus \mathbb{R}\mathbf{e}_{n+1}$ où H_i est l'hyperplan (à $n-1$ dimensions) de la réflexion S_i dans E_n). On a ainsi $SA = S_1S_2 \cdots S_k$ et donc puisque $S^2 = I$, $A = SS_1S_2 \cdots S_k$. \square

En particulier, tout élément de $SO(3)$ peut s'écrire comme le produit de deux réflexions. Tout élément R de $SO(3)$ est la matrice d'une rotation d'angle φ et d'axe \mathbf{n} , $R = r(\varphi, \mathbf{n})$. En fait, le produit de deux réflexions dans des plans se coupant le long de l'axe de la rotation et formant un angle $\varphi/2$ est égal à R .

Sous-groupes finis de $SO(3)$

Soit G un sous-groupe fini de $SO(3)$. Comme l'origine est invariante par G , il est commode de considérer G comme un groupe agissant sur la sphère. Chaque rotation peut être ainsi vue comme une rotation autour d'un point de la sphère (une rotation d'angle φ autour de P étant la même chose qu'une rotation d'angle $-\varphi$ autour du point antipodal).

On appelle **triangle sphérique** tout triangle sur la sphère dont les côtés sont des segments de grands cercles.

Théorème 2.4. *Si les sommets d'un triangle sphérique PQR sont ordonnés dans le sens horlogique et que p, q, r sont les angles respectifs à ces sommets, alors le produit des rotations d'angles $2p, 2q$ et $2r$ autour de P, Q et R est égal à l'identité.*

Démonstration : On exprime chacune des rotations comme produit de réflexions dans les grands cercles : RP, PQ pour la première ; PQ, QR pour la deuxième ; et QR, RP pour la troisième. \square

Par conséquent, le produit des rotations d'angles $2p$ et $2q$ autour de P et Q est la rotation d'angle $-2r$ autour de R .

Sous-groupes finis de $SO(3)$ ne possédant que des axes d'ordre 2 Le produit de deux demi-tours autour de P et Q est une rotation autour d'un des pôles du grand cercle passant par P et Q d'un angle $-2r$

(ou de $2r$ autour de l'autre pôle). On voit cela facilement en plaçant P et Q sur l'équateur, ce que l'on peut faire sans nuire à la généralité. Que vaut r ? Comme le sommet R du triangle sphérique est un des pôles, l'angle r en R est égal à l'angle POQ formé par les demi-droites OP et OQ passant par le centre O de la sphère. Cette rotation ne sera un demi-tour que si les axes OP et OQ sont perpendiculaires.

On peut donc uniquement considérer les groupes avec 1 axe d'ordre 2 ou 3 axes d'ordre 2 perpendiculaires.

On trouve donc que les seuls sous-groupes finis de $SO(3)$ ne possédant que des axes d'ordre 2 sont C_2 (groupe cyclique d'ordre 2 avec un seul axe d'ordre 2) et D_2 (groupe diédral d'ordre 4 avec trois axes d'ordre 2 perpendiculaires).

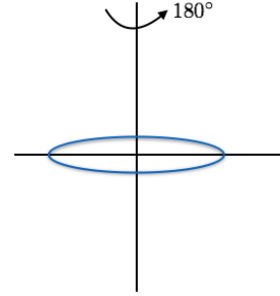


FIGURE 2.3: $C_2 \simeq \mathbb{Z}_2$

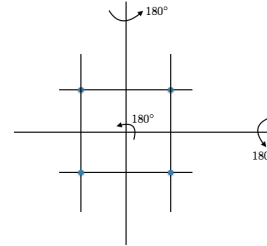
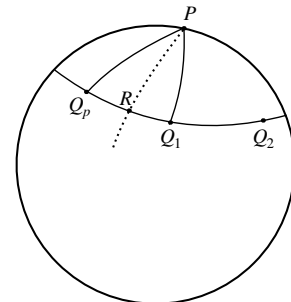


FIGURE 2.4: $D_2 \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

Sous-groupes finis de $SO(3)$ pouvant posséder des axes d'ordre 2 mais ne possédant qu'un seul axe d'ordre p strictement plus grand que 2, $p > 2$
 S'il y a un seul axe d'ordre p , celui-ci doit être perpendiculaire à tout axe d'ordre 2 qui serait présent. En effet, le pôle de l'axe d'ordre p est envoyé sur un autre pôle d'un axe d'ordre p sous une rotation de 180° autour de l'axe d'ordre 2. Comme cet axe est unique, il faut que le nouveau pôle soit le pôle antipodal de l'axe de départ. L'axe d'ordre 2 est donc perpendiculaire à celui d'ordre p . Les seules possibilités sont les groupes cycliques C_p d'ordre p (sans axe d'ordre 2) et les groupes diédraux D_p d'ordre $2p$ (avec $p = 3, 4, 6$ si le groupe est cristallographique) avec des axes d'ordre 2.

Sous-groupes finis de $SO(3)$ possédant plusieurs axes d'ordre strictement plus grand que 2 Soit OP un axe d'ordre p . Considérons tous les points sur la sphère correspondant à des axes d'ordre strictement plus grand que 2 et leur distance (sur la sphère) à P . Comme le sous-groupe est fini, il existe une plus petite distance parmi ces distances et donc un point Q_1 à distance minimum de P définissant un axe d'ordre q strictement plus grand que 2. Des rotations successives d'angle $\frac{2\pi}{p}$ autour de P amène Q_1 sur les points Q_2, \dots, Q_p qui sont tous des centres d'ordre q . Ces points sont sur un petit cercle de centre P et de rayon PQ_1 , qui ne possède aucun centre d'ordre strictement plus grand que 2 en son intérieur.



Considérons le produit de la rotation d'angle $\frac{2\pi}{p}$ autour de P par la rotation d'angle $\frac{2\pi}{q}$ autour de Q_1 . C'est une rotation d'angle $-\frac{2\pi}{r}$ autour du point R tel que le triangle sphérique PQ_1R a pour angles $\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}$ et $\frac{\pi}{r}$. Le point R est donc sur la bissectrice de Q_pPQ_1 . A ce stade, on ne peut dire que r est un entier (on peut avoir $\frac{2\pi}{r} = k\frac{2\pi}{s}$) mais comme la somme des angles d'un triangle sphérique est

strictement plus grande que π , on sait que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1.$$

Mais $p \geq 3$ et $q \geq 3$. Donc $r < 3$ et l'angle $\frac{\pi}{q}$ en Q_1 du triangle PQ_1R est plus petit que son angle $\frac{\pi}{r}$ en R . Il en résulte que R est à l'intérieur du petit cercle² autour de P contenant les Q_i . Comme il n'y a pas d'axe d'ordre strictement plus grand que 2 dans cet intérieur, R est nécessairement un centre d'ordre 2. La rotation d'angle $-\frac{2\pi}{r}$ est un demi-tour. Comme elle amène Q_p en Q_1 (c'est le produit de la rotation d'angle $\frac{2\pi}{p}$ autour de P par la rotation d'angle $\frac{2\pi}{q}$ autour de Q_1), R est sur le grand cercle joignant Q_p à Q_1 . C'est donc le milieu du côté Q_pQ_1 du polygone sphérique $Q_1Q_2 \cdots Q_p$.

Des rotations successives d'angle $\frac{2\pi}{q}$ autour de Q_1 transforme ce polygone régulier (d'angle $\frac{2\pi}{p}$ et possédant p côtés) en un ensemble de q p -gones réguliers entourant Q_1 , dont chaque sommet est un centre d'ordre q . Continuant de la sorte en effectuant des rotations d'angle $\frac{2\pi}{q}$ autour des autres centres d'ordre q , on recouvre toute la sphère par des p -gones réguliers.

Les transformés de Q_1 sont donc les sommets d'un polyèdre régulier $\{p, q\}$, les transformés de P étant les centres des faces et les transformés de R les milieux des arêtes (projetés radialement sur la sphère). Le groupe G est un des groupes des polyèdres $\{p, q\}$.

Résumé La liste complète des sous-groupes finis de $SO(3)$ est donnée par les groupes :

$$C_p, D_p, T, O, Y. \quad (2.14)$$

Parmi ceux-ci, il y a 11 groupes cristallographiques,

$$C_1 = \{e\}, C_2, C_3, C_4, C_6, D_2, D_3, D_4, D_6, T, O. \quad (2.15)$$

Les 32 groupes cristallographiques ponctuels

Les groupes cristallographiques ponctuels sont par définition les sous-groupes finis cristallographiques de $O(3)$. Le sous-groupe d'un groupe cristallographique ponctuel qui contient les transformations de déterminant $+1$ est un sous-groupe fini cristallographique de $SO(3)$ et donc un des onze groupes donnés ci-dessus. Ce sous-groupe est un sous-groupe normal d'indice 2.

On obtient le groupe cristallographique ponctuel le plus général en ajoutant de manière cohérente des "réflexion-rotations" (éléments de $O(3)$ de déterminant -1). Ce problème a été étudié systématiquement et conduit à 32 possibilités. La liste des 32 possibilités est donnée dans la littérature à laquelle nous renvoyons le lecteur intéressé.

2. Les angles sont égaux quand R est sur le petit cercle et que le triangle PQ_1R est isocèle.

On y trouvera aussi, pour chacun des groupes cristallographiques ponctuels, la table des représentations irréductibles.

Les sous-groupes finis de $O(3)$ apparaissent comme groupes de symétries de molécules. Les groupes cristallographiques ponctuels apparaissent aussi dans l'étude des groupes cristallographiques, c'-à-d., des sous-groupes du groupe euclidien $IO(3)$ qui préserve un réseau ("réseau cristallin"). Ces groupes contiennent des translations et sont donc infinis (pas de point fixe). Il y a 230 groupes cristallographiques distincts. Soit G_∞ un groupe cristallographique. Les éléments de G_∞ sont de la forme $(S, \vec{\tau})$ où $S \in O(3)$ et $\vec{\tau}$ est une translation ($\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = S\vec{x} + \vec{\tau}$). Les S apparaissant dans G_∞ forment un sous-groupe fini cristallographique de $O(3)$ qu'on appelle groupe ponctuel du réseau et qui doit être l'un des 32 groupes mentionnés ci-dessus. Les réseaux ayant le même groupe ponctuel appartiennent "à la même classe cristalline". Il y a donc 32 classes cristallines.

Chaque réseau est caractérisé par une cellule minimale, un parallépipède de volume minimal délimité par trois vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ qui sont des translations minimales de G_∞ . On peut regrouper les 32 classes cristallines en 7 systèmes cristallographiques qui possèdent une forme commune de la cellule minimale. On dénote la longueur de $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ par a, b, c et leurs angles par α, β, γ ($\vec{b} \cdot \vec{c} = bc \cos \alpha$, etc). On a

	Nom	Nombre de classes cristallines	Caractéristiques	Exemples physiques
A	Triclinique	2	$a \neq b \neq c, \alpha \neq \beta \neq \gamma$	Sulfate de Cuivre
B	Monoclinique	3	$a \neq b \neq c, \alpha = \gamma = 90^\circ \neq \beta$	Gypse
C	Orthorhombique	3	$a \neq b \neq c, \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	Plutonium
D	Rhomboédral	5	$a = b = c, \alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$	Quartz
E	Tétragonal	7	$a = b \neq c, \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	Etain
F	Hexagonal	7	$a = b \neq c, \alpha = \beta = 90^\circ; \gamma = 120^\circ$	Zinc
G	Cubique	5	$a = b = c, \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	Cuivre, Or, Diamant, Fer

3

Représentation des groupes finis

Alors que la classification des groupes finis est une tâche ardue, la théorie des représentations des groupes finis peut être exposée en toute généralité en quelques dizaines de pages. Nous le ferons donc ici. Tous les outils présentés ici peuvent être appliqués pour un groupe fini *quelconque*.

3.1 Notions élémentaires

On considère dans ce cours uniquement les représentations *linéaires* que nous les appellerons simplement représentations.

Représentation (Définition 1) Soit G un groupe et V un espace vectoriel. On appelle **représentation** du groupe G dans l'espace V toute application T qui fait correspondre à chaque élément $g \in G$ un opérateur linéaire $T(g)$ de l'espace V , telle que

- $T(e) = I$ où e est le neutre de G et I l'application identité de V
- $T(g_1 \star g_2) = T(g_1)T(g_2), \forall g_1, g_2 \in G$

L'espace V est appelé **espace de la représentation** T , la dimension de V est la **dimension de la représentation** et les opérateurs $T(g)$ sont les **opérateurs de la représentation**.

En physique, l'espace vectoriel V a le rôle d'un espace d'états physiques du système sous considération ou espace de configuration. Le groupe de symétrie du système peut agir sur cet espace de configurations.

Représentation (Définition 2) De manière équivalente, une **représentation** de G dans l'espace V est un homomorphisme T de G dans le groupe $GL(V)$ des opérateurs linéaires bijectifs de V .

Soit e_a une base de V . On utilisera par la suite la convention que e_a sont des covecteurs. Les matrices de représentation agissent donc comme une multiplication par la droite

Ici, les indices peuvent être placés en haut ou en bas en utilisant la métrique Euclidienne δ^{ab} et δ_{ab} définie sur l'espace vectoriel V . Nous garderons tous les indices en bas par convention.

$$T(g)e_a = e_b(T(g))_{ba} \quad (3.1)$$

Ainsi, si $v = v_a e_a \in V$, les composantes v_a dans la base se transforment sous multiplication matricielle comme un vecteur colonne,

$$(T(g)v)_a = (T(g))_{ab} v_b. \quad (3.2)$$

Représentation fidèle Une représentation est **fidèle** si l'homomorphisme $T : G \mapsto GL(V)$ est injectif ($\text{Ker}(T) = e$), de telle sorte que G est isomorphe à $\text{Im}(T)$.

Représentation triviale Une représentation de G est **triviale** si elle associe à tout $g \in G$ l'opérateur identité. Dans ce cas, $\text{Ker}(T) = G$.

Remarques

- $\text{Ker}(T)$ est un sous-groupe normal de G . Comme un groupe simple n'a pas de sous-groupe normal non-trivial, $\text{Ker}(T) = e$ ou $\text{Ker}(T) = G$. Donc, les représentations d'un groupe simple dans un espace V sont toutes fidèles, à l'exception de la représentation triviale.
- Si G est lui-même un groupe d'opérateurs linéaires, alors l'**application identique** de G sur G est elle-même une représentation $T(g) = g$.
- Soit H un sous-groupe de G . Toute représentation de G dans l'espace vectoriel V définit une représentation de H dans V , par restriction aux éléments de H .

Entrelacement, Isomorphisme et Equivalence Un **opérateur d'entrelacement** ou **G -morphisme** $S : V_1 \mapsto V_2$ entre deux représentations (T_1, V_1) et (T_2, V_2) de G est une application linéaire telle que

$$ST_1(g) = T_2(g)S, \quad \forall g \in G. \quad (3.3)$$

Un **isomorphisme** est un opérateur d'entrelacement inversible. Deux représentations T^1 et T^2 sont dites **équivalentes** $T^1 \sim T^2$ si elles sont isomorphes.

Lemme 3.1 (Schur). Soient T^1 et T^2 deux représentations irréductibles de G et S un opérateur d'entrelacement entre T^1 et T^2 . Alors il y a deux cas possibles : soit S est un isomorphisme, $T^1 \sim T^2$ et $S = \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{C}$ ou soit $T^1 \approx T^2$ et $S = 0$.

Démonstration. Soient V_1 et V_2 les espaces des représentations T^1 et T^2 . $\text{Ker}(S)$ et $\text{Im}(S)$ sont des sous-espaces invariants respectivement de V_1 et V_2 . L'irréductibilité implique que soit $\text{Ker}(S) = V_1$ et donc $\text{Im}(S) = \emptyset$ c'est-à-dire $S = 0$, soit $\text{Ker}(S) = \emptyset$ et donc $\text{Im}(S) =$

Rappel : Un sous-espace $M \subset V$ est invariant pour la représentation T s'il est invariant relativement à tous les opérateurs $T(g)$, $T(g)M \subset M$, $\forall g \in G$. Les sous-espaces triviaux $\{0\}$ et V sont invariants. Une représentation est irréductible si elle ne possède pas de sous-espace invariant non-trivial. Une représentation qui n'est pas irréductible est appelée réductible.

V_2 c'est-à-dire S est un isomorphisme. Dans le cas $T^1 \sim T^2$, le polynôme en λ $\det(S - \lambda I) = 0$ a au moins une solution $\lambda = \lambda_0$. Alors $\text{Ker}(S - \lambda_0 I) \neq 0$. Le G -morphisme $S - \lambda_0 I$ alors admet $\text{Ker}(S - \lambda_0 I) = V_1$ c'est-à-dire $S = \lambda_0 I$. \square

On considère dans ce cours uniquement les espaces vectoriels V muni d'un produit scalaire hermitien $(w|v)$ avec $v, w \in V$, c'est-à-dire satisfaisant $(w|v)^* = (v|w)$.

En mécanique quantique, les éléments de V sont dénotés avec une notation *ket* $|v\rangle$, $v \in V$ tandis que les éléments de l'espace conjugué V^* sont dénotés avec un *bra* $\langle w|$, $w \in V^*$. Le produit scalaire est dans cette notation $\langle w|v\rangle = \langle w \cdot v \rangle$.

Représentation unitaire Une représentation (T, V) de G est **unitaire** si V est muni d'un produit scalaire hermitien invariant sous l'action de G , c'est-à-dire

$$(T(g)w|T(g)v) = (w, v), \quad \forall g \in G. \quad (3.4)$$

Caractère d'une représentation Soit (T, V) une représentation du groupe G . Le **caractère** d'un élément $g \in G$ est défini comme

$$\chi_V(g) = \text{tr}_V T(g). \quad (3.5)$$

On notera aussi souvent χ_T en référence à la représentation T .

Propriétés

— Le caractère d'un élément du groupe dans une représentation donnée dépend uniquement de sa classe de conjugaison. En effet,

$$\chi_V(hgh^{-1}) = \chi_V(g), \quad \forall g, h \in G.$$

— Autres propriétés :

$$\chi_V(e) = \dim(V),$$

$$\chi_{V_1 \oplus V_2} = \chi_{V_1} + \chi_{V_2},$$

$$\chi_{V_1 \otimes V_2} = \chi_{V_1} \cdot \chi_{V_2},$$

$$\chi_{V^*} = \chi_V^*.$$

3.2 Représentation régulière

Représentation régulière (Définition 1) Soit $G = \{e, g_1, \dots, g_{n-1}\}$ un groupe fini d'ordre n . Soit l'espace de représentation $V_R \equiv \mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire hermitien usuel $(v|w) = v^* \cdot w$, $\forall v, w \in V_R$. On associe à chaque élément g_i de G un élément e_{g_i} de V_R tel que $\{e_{g_i}\}$ soit une base orthonormée de V_R . La **représentation régulière** (à droite) $T_R : G \mapsto GL(\mathbb{C}^n)$ est définie comme

$$T_R(g)e_h = e_{h*g^{-1}}, \quad \forall g, h \in G. \quad (3.6)$$

Pour $\mathbb{Z}_3 = \{e, a, a^2\}$, on associe

$$e \mapsto e_e \equiv (1 \ 0 \ 0),$$

$$a \mapsto e_a \equiv (0 \ 1 \ 0),$$

$$a^2 = a^{-1} \mapsto e_{a^2} \equiv (0 \ 0 \ 1).$$

Alors

$$T_R(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_R(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_R(a^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par définition, la représentation régulière consiste en n matrices de permutation des éléments de la base \mathbb{C}^n .

Pour les groupes finis, la représentation régulière a une importance capitale. On montrera plus tard qu'elle contient toutes les représentations irréductibles de G . Elle permettra de démontrer le théorème de Peter-Weyl. Dans ce but, nous allons donner une définition plus formelle de la représentation régulière.

On dénote

$$L^2(G)$$

l'espace de fonctions sur G à valeurs complexes. L'ensemble $L^2(G)$ est un espace vectoriel puisque $(\alpha f + \beta h)(g) = \alpha f(g) + \beta h(g)$, $\forall f \in L^2(G)$ et $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$. La dimension de $L^2(G)$ est n , l'ordre du groupe puisque toute fonction f est complètement déterminée par les valeurs $(f(g_1), \dots, f(g_n))$ qu'elle prend sur les n éléments g_i du groupe. On a donc en tant qu'espace vectoriel $L^2(G) \simeq \mathbb{C}^n$. Une base est donnée par les fonctions $\{e_{g_i}\}$ telles que $e_{g_i}(g_j) = \delta_{ij}$. Tout $f \in L^2(G)$ peut être écrit dans cette base comme

$$f = \sum_{g_i \in G} f(g_i) e_{g_i}. \tag{3.7}$$

Représentation régulière (Définition 2) A tout élément $g \in G$ du groupe G on associe un opérateur linéaire $T_R(g)$ agissant sur les fonctions f de $L^2(G)$ par la relation

$$T_R(g)f = f_g \tag{3.8}$$

où la fonction $f_g \in L^2(G)$ est définie par

$$f_g(h) = f(h \star g). \tag{3.9}$$

On vérifie l'équivalence des définitions. Suivant la définition (3.8),

$$\begin{aligned} (T_R(g_i)(e_{g_j}))(g_m) &= e_{g_j}(g_m g_i) \\ &= e_{g_j}(g_n) \\ &= \delta_{j,n} \end{aligned}$$

où $g_n = g_m g_i$. Le membre de droite est non nul ssi $g_j = g_m g_i$ ou de manière équivalente $g_j g_i^{-1} = g_m$. On a donc

$$T_R(g_i)(e_{g_j}) = e_{g_j g_i^{-1}} \tag{3.10}$$

ce qui est la définition 3.6.

$L^2(G)$ est équipé du **produit hermitien moyen sur G** qui est un produit scalaire hermitien

On vérifie

$$T_R(a^2)e_{a^2} = (0 \ 0 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = e_e.$$

$$T_R(a^2)e_a = (0 \ 1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = e_{a^2}.$$

Par exemple, le caractère χ_V d'une représentation (T, V) est un élément de $L^2(G)$.

On vérifie qu'il s'agit d'une représentation :

$$\begin{aligned} T_R(g_1 \star g_2)f(h) &= f(h \star g_1 \star g_2) \\ &= (T_R(g_2)f)(h \star g_1) \\ &= (T_R(g_1)(T_R(g_2)f))(h) \end{aligned}$$

d'où $T_R(g_1 \star g_2) = T_R(g_1)T_R(g_2)$.

On vérifie qu'elle est linéaire :

$$\begin{aligned} T_R(g)(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(h) &= (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(h \star g) \\ &= \alpha_1 f_1(h \star g) + \alpha_2 f_2(h \star g) \\ &= \alpha_1 T_R(g)f_1(h) + \alpha_2 T_R(g)f_2(h). \end{aligned}$$

Attention que dans la convention du cours (3.1), les matrices agissent par la droite sur des covecteurs et donc $(T_R(g_1 \star g_2))_{ab} = (T_R(g_2))_{ac}(T_R(g_1))_{cb}$.

On omettra en séances d'exercices le sous-indice M pour simplifier la notation. Dans ce syllabus, on gardera le sous-indice M vu qu'on définit d'autres produits scalaires.

$$(f_1|f_2)_M = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} f_1^*(g) f_2(g). \quad (3.11)$$

En particulier $(f|f)_M = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} |f(g)|^2 \geq 0$ et $(f|f)_M = 0$ ssi $f(g) = 0 \forall g \in G$.

Proposition 3.1.1. *La représentation régulière est unitaire pour le produit hermitien moyen.*

Démonstration.

$$\begin{aligned} (T_R(g)f_1|T_R(g)f_2)_M &= \frac{1}{n} \sum_{h \in G} (T_R(g)f_1)^*(h) (T_R(g)f_2)(h) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{h \in G} f_1^*(hg) f_2(hg) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{h' \in G} f_1^*(h') f_2(h') \\ &= (f_1|f_2)_M \end{aligned}$$

avec $h' = hg$ (h' parcourt le groupe une et une seule fois comme h). □

3.3 Equivalence aux représentations unitaires et réductibilité

Théorème 3.2. *Toute représentation d'un groupe fini est équivalente à une représentation unitaire.*

Démonstration. Soit G un groupe fini d'ordre n , V son espace de la représentation et $(|)$ le produit hermitien sur V . Soient $T(g)$ les opérateurs de la représentation. On n'a pas a priori $(T(g)x|T(g)y) = (x|y)$, mais on va montrer qu'il existe un isomorphisme S tel que $(T'(g)x|T'(g)y) = (x|y)$ où $T'(g) = ST(g)S^{-1}$. A cette fin, on introduit le produit hermitien auxiliaire

$$(x|y)_G = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} (T(g)x|T(g)y)$$

qui est bien défini puisque la somme est finie.

On a

1. $(x|y)_G = ((y|x)_G)^*$
2. $(x|\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)_G = \alpha_1 (x|y_1)_G + \alpha_2 (x|y_2)_G$
3. $(x|x)_G \geq 0$

avec $(x|x)_G = 0$ ssi chacun des termes non négatifs $(T(g)x|T(g)x)$ est nul et donc en particulier $(T(e)x|T(e)x) = (x|x) = 0$ ce qui implique $x = 0$. Le produit $(|)_G$ est donc bien hermitien.

En fait, la preuve s'applique également aux groupes infini-dimensionnels compacts et à leurs représentations finies. Il faut alors définir

$$(x|y)_G = \int_G d\tau (T(g)x|T(g)y).$$

Pour un groupe compact et une représentation finie, l'intégrale est finie.

Les opérateurs $T(g)$ sont unitaires pour le produit scalaire auxiliaire $(\cdot | \cdot)_G$. En effet,

$$\begin{aligned} (T(g)x|T(g)y)_G &= \frac{1}{n} \sum_{g' \in G} (T(g')T(g)x|T(g')T(g)y) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{g' \in G} (T(g'g)x|T(g'g)y) \end{aligned}$$

Mais lorsque g' parcourt le groupe une et une seule fois, le produit $g'g$ parcourt aussi le groupe une et une seule fois. Donc

$$(T(g)x|T(g)y)_G = \frac{1}{n} \sum_{h \in G} (T(h)x|T(h)y) = (x|y)_G.$$

La représentation T est donc bien unitaire pour $(\cdot | \cdot)_G$.

Soit $\{\bar{e}_k\}$ une base orthonormée pour le produit scalaire hermitien auxiliaire et $\{e_k\}$ une base orthonormée pour le produit de départ. On a $e_k = S\bar{e}_k$ pour un certain opérateur inversible S (opérateur de changement de base). Comme $(\bar{e}_k|\bar{e}_l)_G = \delta_{kl} = (e_k|e_l) = (S\bar{e}_k|S\bar{e}_l)$ pour tous k, l , on a aussi

$$(x|y)_G = (Sx|Sy), \quad (x|y) = (S^{-1}x|S^{-1}y)_G$$

pour tous vecteurs $x, y \in V$.

Soit $T'(g) = S T(g) S^{-1}$. Démontrons que les opérateurs $T'(g)$ sont unitaires pour le produit scalaire hermitien de départ. On a :

$$\begin{aligned} (T'(g)x|T'(g)y) &= (ST(g)S^{-1}x|ST(g)S^{-1}y) \\ &= (T(g)S^{-1}x|T(g)S^{-1}y)_G \\ &= (S^{-1}x|S^{-1}y)_G \\ &= (x|y) \end{aligned}$$

ce qui démontre l'assertion. \square

Lemme 3.3. Soit (T, V) une représentation unitaire et $W \subseteq V$ un sous-espace invariant. Alors le complément W^\perp est aussi invariant.

Démonstration. Si $v \in W^\perp$ alors $(v|w) = 0, \forall w \in W$. Soit $w \in W$, alors $T(g)^{-1}w \in W$ par hypothèse. On a $0 = (v|T(g)^{-1}w) = (T(g)v|w)$. Donc $T(g)v \in W^\perp, \forall g \in G, \forall v \in W^\perp$ et W^\perp est invariant. \square

Proposition 3.3.1. Toute représentation unitaire est complètement réductible.

Démonstration. Soit V l'espace de représentation. Si la représentation est irréductible, il n'y a rien à démontrer. Supposons qu'elle est réductible. Soit W_1 un sous-espace invariant. On a $V = W_1 \oplus W_1^\perp$ en tant qu'espace vectoriel. De plus par le lemme précédent, la somme est directe en tant qu'espace de représentation du groupe. On procède ensuite par itérations successives en décomposant W_1 et W_1^\perp , avec $W_1 = W_2 \oplus W_2^\perp$, etc. La procédure se termine car V est fini. \square

Corollaire 3.3.1. *Toute représentation d'un groupe fini se décompose comme une somme directe*

$$T = m_1 T_1 \oplus m_2 T_2 \oplus \cdots \oplus m_k T_k$$

de représentations irréductibles. Pour décrire la représentation la plus générale, il faut connaître toutes les représentations irréductibles.

C'est aussi vrai pour toute représentation finie d'un groupe compact.

3.4 Relations d'orthogonalité

Soient T^1, T^2, \dots des représentations irréductibles de G dans les espaces V^1, V^2, \dots qui peuvent être de dimensions distinctes. On suppose qu'elles sont unitaires pour le produit scalaire usuel dans V^i , $(w|v) = \sum_{k=1}^{\dim(V^i)} w_k^* v_k$. On dénote par $(t^1(g))_{ab}, (t^2(g))_{ij}, \dots$ les éléments de matrice des matrices $T^1(g), T^2(g), \dots$ associées à g avec $a, b, \dots = 1, \dots, \dim(V^1), i, j, \dots = 1, \dots, \dim(V^2), \dots$ Ils obéissent à la condition

$$(t^1(g^{-1}))_{ab} = \left((t^1(g))_{ab} \right)^\dagger = t^1(g)_{ba}^* \dots$$

Les éléments de matrice $(t^1)_{ab}$ sont des fonctions sur G à valeurs complexes et appartiennent donc à l'espace vectoriel $L^2(G)$ défini précédemment dans le cadre de la représentation régulière. On rappelle que $L^2(G)$ est équipé du produit scalaire moyen (3.11).

Théorème 3.4 (Relations d'orthogonalité). *Soient T^1 et T^2 deux représentations irréductibles d'un groupe fini G et $(t^1)_{ab}, (t^2)_{ij}$ les fonctions de $L^2(G)$ correspondantes. Alors :*

— Si T^1 et T^2 sont inéquivalentes,

$$T^1 \not\sim T^2 \quad \Rightarrow \quad ((t^1)_{ab} | (t^2)_{ij})_M = 0, \quad \forall a, b, i, j$$

— Si T^1 et T^2 sont équivalentes, les indices i, j, \dots prennent les mêmes valeurs que a, b, \dots et

$$T^1 \sim T^2 \quad \Rightarrow \quad ((t^1)_{ab} | (t^1)_{cd})_M = \frac{1}{n_1} \delta_{ac} \delta_{bd} \quad \forall a, b, c, d$$

où n_1 est la dimension de la représentation T^1 .

Démonstration. Soit B un opérateur linéaire quelconque de V^2 dans V^1 . Posons

$$C = \frac{1}{n} \sum_g T^1(g) B T^2(g^{-1}).$$

On a :

$$\begin{aligned}
T^1(h) C &= T^1(h) \frac{1}{n} \sum_g T^1(g) B T^2(g^{-1}) \\
&= \frac{1}{n} \sum_g T^1(h) T^1(g) B T^2(g^{-1}) \\
&= \frac{1}{n} \sum_g T^1(hg) B T^2(g^{-1}) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{g'} T^1(g') B T^2(g'^{-1}h) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{g'} T^1(g') B T^2(g'^{-1}) T^2(h) \\
&= \left(\frac{1}{n} \sum_g T^1(g) B T^2(g^{-1}) \right) T^2(h) \\
&= C T^2(h)
\end{aligned}$$

où on a posé $g' = hg$ et donc $g^{-1} = g'^{-1}h$, et utilisé le fait que si g parcourt le groupe une et une seule fois, il en est de même de g' (h est fixé). L'opérateur C est donc un opérateur d'entrelacement.

Par conséquent, si les représentations irréductibles T^1 et T^2 sont inéquivalentes, $T^1 \approx T^2$, on a $C = 0$ par le lemme de Schur ($\forall B$) ou encore, de manière explicite,

$$\frac{1}{n} \sum_{g \in G} \sum_{c=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{n_2} (t^1(g^{-1}))_{ac} B_{ck} (t^2(g))_{kj} = 0$$

où on a remplacé g par g^{-1} dans la somme sur le groupe. Comme la représentation T^1 est unitaire, on peut récrire cette équation comme suit,

$$\frac{1}{n} \sum_{g \in G} \sum_{c=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{n_2} (t^1(g))_{ca}^* B_{ck} (t^2(g))_{kj} = 0$$

Prenons $B_{ck} = \delta_{cb} \delta_{ki}$ (tous les éléments de matrice de B sont nuls, sauf l'élément en position (b,i) qui est égal à 1). La relation devient

$$\frac{1}{n} \sum_g (t^1(g))_{ba}^* (t^2(g))_{ij} = 0$$

c'-à-d

$$((t^1)_{ab} | (t^2)_{ij})_M = 0 \quad (T^1 \approx T^2).$$

Supposons à présent $T^1 \sim T^2$. Par le lemme de Schur, on sait que $C = \lambda_B I$ où λ_B est une constante qui peut dépendre de B . Donc on a

$$\frac{1}{n} \sum_{g \in G} \sum_{\ell=1}^{n_1} \sum_{f=1}^{n_1} (t^1(g))_{ca}^* B_{\ell f} (t^1(g))_{fc} = \lambda_B \delta_{ac}.$$

Que vaut λ_B ? En prenant la trace de C , on obtient $\text{tr } C = n_1 \lambda_B$. Mais d'autre part, d'après la définition de C ,

$$\text{tr } C = \frac{1}{n} \sum_g \text{tr} \left(T^1(g) B T^1(g^{-1}) \right) = \frac{1}{n} \sum_g \text{tr } B = \text{tr } B$$

d'où l'on tire $n_1 \lambda_B = \text{tr } B$. Prenant $B_{ef} = \delta_{eb} \delta_{fd}$ (tous les éléments de matrice de B sont nuls, sauf l'élément en position (b,d) qui est égal à 1), on obtient

$$\frac{1}{n} \sum_g ((t^1(g))_{ba}^* (t^1)_{dc}(g)) = \frac{1}{n_1} \delta_{ac} \delta_{bd}$$

(la trace de B vaut δ_{bd}), c'-à-d

$$((t^1)_{ab} | (t^1)_{cd})_M = \frac{1}{n_1} \delta_{ac} \delta_{bd}$$

après avoir réarrangé les indices et ignoré les transposées irrelevantes ici. \square

Corollaire 3.4.1. *Les éléments de matrice $(t^i)_{ab}$ des différentes représentations irréductibles forment un système orthogonal et en particulier libre¹ de $L^2(G)$. Comme $L^2(G)$ est fini-dimensionnel, les $(t^i)_{ab}$ sont en nombre fini et leur nombre ne peut dépasser l'ordre n du groupe ($= \dim L^2(G)$). Il en résulte qu'il n'existe qu'un nombre fini ($\leq n$) de représentations irréductibles deux à deux inéquivalentes d'un groupe fini.*

3.5 Théorèmes de Peter-Weyl et Burnside

Système complet de représentations irréductibles On dit qu'une famille T^1, \dots, T^m de représentations irréductibles d'un groupe G forme un **système complet** ssi

- les représentations T^1, \dots, T^m sont irréductibles et deux à deux inéquivalentes ;
- toute représentation irréductible de G est équivalente à une des représentations T^i .

Théorème 3.5 (Peter-Weyl). *L'espace $L^2(G)$ des fonctions complexes sur le groupe G admet une base orthonormée d'un système complet de représentations irréductibles T^1, \dots, T^m de G . Cette base est donnée par les éléments de matrice normés $\sqrt{n_k} (t^i)_{ab}$ ($i = 1, \dots, m$ et $a, b, \dots = 1, \dots, n_i = \dim(V^i)$).*

Démonstration. Soit un système complet de représentations irréductibles T^1, \dots, T^m de G . On a déjà prouvé que leurs éléments de matrice sont linéairement indépendants (système libre) et orthogonaux. Ils sont orthonormés après les avoir normés comme $\sqrt{n_k} (t^i)_{ab}$.

Rappel : l'ensemble à valeurs dans \mathbb{R} f_1, \dots, f_m est libre si $\sum_{i=1}^m \alpha_i f_i = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$.

1. En effet, si m fonctions $f_1, f_2, \dots, f_m \in L^2(G)$ sont orthogonales deux à deux

$$(f_i | f_j) = 0, \quad i \neq j$$

et sont non-nulles

$$(f_i | f_i) \neq 0, \quad \forall i$$

alors les fonctions sont linéairement indépendantes, c'est-à-dire forment un système libre. (Preuve par l'absurde)

Il suffit donc de prouver que c'est un système complet, c-à-d que toute fonction $f \in L^2(G)$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des $(t^i)_{ab}$.

Considérons la représentation régulière T de G ,

$$T(g)f(h) = f(hg).$$

Comme elle est unitaire, elle est complètement réductible et peut s'écrire comme somme directe de représentations irréductibles,

$$L^2(G) = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_p$$

où les V_i sont des sous-espaces invariants tels que la restriction de T à V_i est irréductible et donc équivalente à une des représentations du système complet, soit $T^{\ell(i)}$ pour une certaine fonction ℓ .

En choisissant bien la base de V_i , on peut s'arranger pour que les éléments de matrice de $T(g)$ restreints à V_i soient égaux à $(t^{\ell(i)})_{ab}$.

Si $\{f_a^{\ell(i)}\}$ est cette base ($a = 1, \dots, n_{\ell(i)}$), on a explicitement

$$T(g)f_a^{\ell(i)} = \sum_{b=1}^{n_{\ell(i)}} f_b^{\ell(i)} (t^{\ell(i)})_{ba}(g),$$

ou encore, puisque $f_a^{\ell(i)} \in L^2(G)$

$$(T(g)f_a^{\ell(i)})(h) = \sum_{b=1}^{n_{\ell(i)}} f_b^{\ell(i)}(h) (t^{\ell(i)})_{ba}(g).$$

Mais par définition, $(T(g)f_a^{\ell(i)})(h) = f_a^{\ell(i)}(hg)$. Donc,

$$f_a^{\ell(i)}(hg) = \sum_{b=1}^{n_{\ell(i)}} f_b^{\ell(i)}(h) (t^{\ell(i)})_{ba}(g).$$

Prenons $h = e$ et posons $f_a^{\ell(i)}(e) = c_a^{\ell(i)}$. On obtient ainsi :

$$f_a^{\ell(i)}(g) = \sum_{b=1}^{n_{\ell(i)}} c_b^{\ell(i)} (t^{\ell(i)})_{ba}(g).$$

Ceci montre que les fonctions $f_a^{\ell(i)}$ sont combinaisons linéaires des fonctions $(t^{\ell(i)})_{ba}$. Comme la propriété est vraie pour chacun des sous-espaces invariants V_i , on en tire que toutes les fonctions de la base considérée de $L^2(G)$ sont des combinaisons linéaires des $(t^i)_{ba}$, ce qui démontre bien que les $\{(t^i)_{ab}\}$ forment un ensemble complet de fonctions de $L^2(G)$. \square

Théorème 3.6 (Burnside). *L'ordre n d'un groupe fini est égal à la somme des carrés des dimensions des représentations irréductibles d'un système complet de représentations de ce groupe,*

$$n = \sum_{i=1}^m (n_i)^2,$$

où m est le nombre de représentations irréductibles non-équivalentes.

Démonstration. Les $\{(t^i)_{ab}\}$ forment une base de $L^2(G)$. Pour chaque i , on a $(n_i)^2$ fonctions. Donc on a au total $\sum_{i=1}^m (n_i)^2$ éléments dans la base $\{(t^i)_{ab}\}$. Mais d'autre part, $\dim L^2(G) = n$, ce qui implique le théorème. \square

Remarque Parmi les n_i , il y a toujours au moins 1 car la représentation triviale à une dimension est irréductible.

Premier exemples :

$$\begin{aligned} 1 &= 1^2 && \\ 2 &= 1^2 + 1^2 && \mathbb{Z}_2 \\ 3 &= 1^2 + 1^2 + 1^2 && \mathbb{Z}_3 \\ 4 &= 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 && \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \end{aligned}$$

Décomposition de la représentation régulière d'un groupe fini

Théorème 3.7. *La représentation régulière T_R contient chaque représentation irréductible avec une multiplicité égale à sa dimension,*

$$T_R = n_1 T^1 \oplus n_2 T^2 \oplus \cdots \oplus n_m T^m.$$

Démonstration. Soit M_a^i le sous-espace à n_i dimensions de $L^2(G)$ engendré par les fonctions $(t_a^i)_b \equiv (t^i)_{ab}$ ($b = 1, \dots, n_i$) où i et a sont fixés,

$$f \in M_a^i \Leftrightarrow f(g) = \sum_{b=1}^{n_i} f^b (t^i)_{ab}(g).$$

Par les relations d'orthogonalité, on a $M_a^i \perp M_{a'}^{i'}$ pour $i \neq i'$ ou $a \neq a'$. En outre, comme les $(t^i)_{ab}$ forment une base, on a en tant qu'espaces vectoriels

$$L^2(G) = \bigoplus_{i,a} M_a^i.$$

Les sous-espaces M_a^i sont invariants pour la représentation régulière. Pour démontrer cette propriété, examinons l'action de $T(g)$ sur la fonction $(t^i)_{ab}$ de base de M_a^i ,

$$\left(T(g)(t^i)_{ab} \right) (h) = (t^i)_{ab}(hg).$$

Mais les T^i sont des représentations, $T^i(hg) = T^i(h)T^i(g)$, c'-à-d., en termes des éléments de matrice,

$$(t^i)_{ab}(hg) = \sum_{c=1}^{n_i} (t^i)_{ac}(h)(t^i)_{cb}(g),$$

ce qui montre que

$$\left(T(g)(t_a^i)_b \right) (h) = \sum_{c=1}^{n_i} (t_a^i)_c(h)(t^i)_{cb}(g),$$

ou encore

$$T(g)(t_a^i)_b = \sum_{c=1}^{n_i} (t^i)_{cb}(g)(t_a^i)_c \in M_a^i.$$

On voit également que les éléments de matrice de $T|_{M_a^i}$ dans la base $\{(t_a^i)_b\}$ ($b = 1, \dots, n_i$) ne sont autres que les $(t^i)_{ab}(g)$. La représentation $T|_{M_a^i}$ induite dans le sous-espace M_a^i est donc T^i . Comme a va de 1 à n_i , celle-ci apparaît n_i fois. \square

Une autre démonstration sera donnée plus bas.

3.6 Caractères des représentations irréductibles

Relations d'orthogonalité des caractères

Théorème 3.8. Soient T^i ($i = 1, \dots, m$) un système complet de représentations irréductibles d'un groupe fini G et χ_i ($i = 1, \dots, m$) les caractères correspondants. Alors,

$$(\chi_i | \chi_j)_M = \delta_{ij}$$

où le produit hermitien moyen sur G est défini en (3.11).

Démonstration. On a $\chi_i = \sum_{a=1}^{n_i} (t^i)_{aa}$. Calculons $(\chi_i | \chi_j)_M$:

$$\begin{aligned} (\chi_i | \chi_j)_M &= \sum_{a=1}^{n_i} \sum_{\alpha=1}^{n_j} ((t^i)_{aa} | (t^j)_{\alpha\alpha})_M \\ &= \sum_{a,\alpha} \frac{1}{n_i} \delta_{ij} \delta_{a\alpha} \delta_{a\alpha} \\ &= \sum_{a=1}^{n_i} \frac{1}{n_i} \delta_{ij} \delta_{aa} \\ &= \delta_{ij}. \end{aligned}$$

\square

Corollaire 3.8.1. Les caractères χ_i sont linéairement indépendants.

Caractères et classes d'équivalences

Les caractères ne dépendent que des classes d'équivalence d'éléments conjugués, $\chi(g) = \chi(h^{-1}gh)$. Considérons le sous-espace M de $L^2(G)$ ne contenant que les fonctions constantes sur les classes d'éléments conjugués ou *fonctions des classes*,

$$f \in M \Leftrightarrow f(g) = f(h^{-1}gh) \quad \forall g, h \in G.$$

Si q est le nombre de classes d'équivalence d'éléments conjugués, M est un sous-espace vectoriel de dimension q .

Théorème 3.9. Les caractères χ_1, \dots, χ_m d'un système complet de représentations irréductibles d'un groupe fini G forment une base orthonormée de M .

Démonstration. Il suffit de montrer la complétude, c-à-d. que toute fonction $f \in M$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des caractères χ_1, \dots, χ_m . Comme les $\{(t^i)_{ab}\}$ forment une base de $L^2(G)$, on a, pour toute fonction $f \in M \subset L^2(G)$,

$$f(g) = \sum_{i=1}^m \sum_{a,b=1}^{n_k} C_{ab}^i (t^i)_{ab}(g)$$

Utilisons à présent le fait que $f(g) = f(h^{-1}gh) \quad \forall h \in G$. Ceci implique

$$f(g) = \sum_{i=1}^m \sum_{a,b=1}^{n_k} C_{ab}^i (t^i)_{ab}(h^{-1}gh).$$

Prenons la moyenne sur h de cette équation. Comme $f(g)$ ne dépend pas de h , cela donne

$$f(g) = \sum_{i=1}^m \sum_{a,b=1}^{n_k} C_{ab}^i \frac{1}{n} \sum_{h \in G} (t^i)_{ab}(h^{-1}gh).$$

Mais T^i est une représentation unitaire,

$$(t^i)_{ab}(h^{-1}gh) = \sum_{c,d=1}^{n_i} (t^i)_{ca}^*(h) (t^i)_{cd}(g) (t^i)_{db}(h)$$

et donc,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{h \in G} (t^i)_{ab}(h^{-1}gh) &= \sum_{c,d=1}^{n_i} (t^i)_{cd}(g) (t^i_{ca} | t^i_{db})_M \\ &= \sum_{c,d=1}^{n_i} (t^i)_{cd}(g) \frac{1}{n_i} \delta_{cd} \delta_{ab} \quad (\text{relations d'orthogonalité}) \\ &= \frac{1}{n_i} \chi_i(g) \delta_{ab} \end{aligned}$$

De là, il vient

$$\begin{aligned} f(g) &= \sum_{i=1}^m \frac{1}{n_i} \sum_{a,b=1}^{n_k} C_{ab}^i \chi_i(g) \delta_{ab} \\ &= \sum_{i=1}^m c^i \chi_i(g) \end{aligned}$$

avec $c^i = \sum_{a=1}^{n_i} \frac{1}{n_i} C_{aa}^i$. □

Corollaire 3.9.1. *Le nombre de représentations irréductibles inéquivalentes d'un groupe fini G est égal au nombre de classes d'éléments conjugués de G .*

Caractères et équivalence des représentations d'un groupe fini

Soit T une représentation quelconque de dimension finie du groupe G . On sait que T est complètement réductible et donc

$$T = m_1 T^1 \oplus m_2 T^2 \oplus \cdots \oplus m_m T^m$$

où m_i est la multiplicité de T^i dans T . On a donc, pour les caractères,

$$\chi_T = m_1 \chi_1 + m_2 \chi_2 + \cdots + m_m \chi_m.$$

Par conséquent,

Proposition 3.9.1. *Le coefficient de χ_i dans la décomposition du caractère χ_T de la représentation T dans la base des caractères $\{\chi_i\}$ est égal à la multiplicité de T^i dans T .*

Si on connaît les caractères d'un système complet, on peut donc dire quelles représentations, et avec quelles multiplicités, apparaissent dans la représentation T .

En utilisant les relations d'orthogonalité, on tire ensuite

$$(\chi_T | \chi_T)_M = m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_m^2.$$

En particulier, on obtient

Proposition 3.9.2. *Soit T une représentation,*

$$(\chi_T | \chi_T)_M = 1$$

ssi T est irréductible.

Enfin, on a :

Théorème 3.10. *Deux représentations T et T' sont équivalentes ssi elles ont mêmes caractères.*

Démonstration. On sait la condition nécessaire. Elle est aussi suffisante. En effet, supposons $\chi_T = \chi_{T'}$. On a

$$T = m_1 T^1 \oplus m_2 T^2 \oplus \cdots \oplus m_m T^m$$

et

$$T' = m'_1 T^1 \oplus m'_2 T^2 \oplus \cdots \oplus m'_m T^m$$

ce qui implique

$$\chi_T = m_1 \chi_1 + m_2 \chi_2 + \cdots + m_m \chi_m$$

et

$$\chi_{T'} = m'_1 \chi_1 + m'_2 \chi_2 + \cdots + m'_m \chi_m.$$

L'égalité $\chi_T = \chi_{T'}$ implique dès lors que toutes les multiplicités sont égales, $m_i = m'_i$, car les χ_i forment une base. On en tire $T \sim T'$. \square

3.7 Projecteurs sur sous-espace invariants

Étant donné une représentation T dans un espace V et une table des caractères $\{\chi_i\}_{i=1}^m$ d'un système de représentations irréductibles $\{T^i\}_{i=1}^m$, nous pouvons connaître quelles représentations apparaissent dans T et quelles sont leurs multiplicités. Une question restante consiste à identifier le sous-espace invariant de V associé à une représentation irréductible T^i donnée (i fixé). On note V_i l'espace vectoriel de la représentation T^i .

Supposons que T contienne m_i fois T^i , $T = m_i T^i \oplus \dots$. Soit

$$V = Y \oplus Y^\perp$$

où

- Y est le sous-espace invariant associé à la représentation T^i , c'-à-d., $Y = Y_1 \oplus Y_2 \oplus \dots \oplus Y_{m_i}$ où $Y_1 \simeq Y_2 \simeq \dots \simeq Y_{m_i}$ est isomorphe à l'espace V_i de la représentation T^i et $T|_{Y_j} \sim T^i$ de sorte que $T|_Y \sim m_i T^i$;
- Y^\perp est le sous-espace invariant complémentaire tel que $T|_{Y^\perp}$ ne contient pas T^i .

On veut déterminer Y et Y^\perp .

Pour ce faire, on va construire le projecteur sur Y , c'-à-d. l'opérateur linéaire π^{T^i} tel que $\pi^{T^i}|_Y = I$, $\pi^{T^i}|_{Y^\perp} = 0$ ce qui implique $(\pi^{T^i})^2 = \pi^{T^i}$. Connaissant π^{T^i} , on trouve Y et Y^\perp par les relations

$$Y = \text{Im } \pi^{T^i}, \quad Y^\perp = \text{Ker } \pi^{T^i}.$$

Nous avons

Théorème 3.11. *Le projecteur π^{T^i} est donné par l'expression :*

$$\pi^{T^i} = \frac{\dim T^i}{n} \sum_g \chi_i^*(g) T(g).$$

On dénote aussi $\dim T^i = n_i$.

Démonstration. Posons

$$\psi \equiv \frac{\dim T^i}{n} \sum_g \chi_i^*(g) T(g).$$

ψ est un opérateur d'entrelacement de T avec elle-même :

$$\psi T(h) = T(h) \psi \quad \forall h \in G.$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\psi T(h) &= \frac{\dim T^i}{n} \sum_g \chi_i^*(g) T(g) T(h) \\
&= \frac{\dim T^i}{n} \sum_g \chi_i^*(g) T(gh) \\
&= \frac{\dim T^i}{n} \sum_g \chi_i^*(g) T(hg') \quad \text{avec } g' = h^{-1}gh \\
&= \frac{\dim T^i}{n} \sum_{g'} \chi_i^*(hg'h^{-1}) T(hg') \\
&= \frac{\dim T^i}{n} \sum_{g'} \chi_i^*(g') T(hg') \quad \text{car } \chi_i^*(hg'h^{-1}) = \chi_i^*(g') \\
&= \frac{\dim T^i}{n} \sum_{g'} \chi_i^*(g') T(h) T(g') \\
&= T(h) \frac{\dim T^i}{n} \sum_{g'} \chi_i^*(g') T(g') \\
&= T(h) \psi.
\end{aligned}$$

Soit R un sous-espace invariant, $T(g)R \subset R$. Comme ψ est une combinaison linéaire des opérateurs de la représentation, il est clair que l'image par ψ de R est incluse dans R , $\psi(R) \subset R$ et $\psi|_R T(h)|_R = T(h)|_R \psi|_R$. Supposons R irréductible. Par le lemme de Schur 3.1, il vient $\psi|_R = \lambda I_R$. Pour déterminer λ , on calcule $\text{Tr } \psi|_R$. On a

$$\begin{aligned}
\text{Tr } \psi|_R &= \frac{\dim T^i}{n} \sum_g \chi_i^*(g) \chi_{T|_R}(g) \\
&= \dim T^i (\chi_i | \chi_{T|_R})_M \\
&= \begin{cases} \dim T^i & \text{si } T|_R \sim T^i \\ 0 & \text{si } T|_R \not\sim T^i \end{cases}
\end{aligned}$$

D'autre part, $\text{Tr}(\lambda I_R) = \lambda \dim R = \lambda \dim T|_R$. On en conclut que $\psi = I_R$ si $T|_R \sim T^i$ et $\psi = 0$ dans le cas contraire, c-à-d. $\psi = \pi^{T^i}$. \square

Notons que la multiplicité m_i de T^i dans T est donnée par

$$m_i = (\chi_i | \chi_T)_M = \frac{\text{Tr}(\pi^{T^i})}{\dim T^i}. \quad (3.12)$$

Représentation régulière On rappelle que les opérateurs de la représentation régulière sont des matrices $n \times n$ de permutations. Le neutre est l'identité $T_R(e) = I_{n \times n}$ et les autres matrices dans la base canonique ont des zéros sur la diagonale (c'est une conséquence directe de (3.10)). On a donc

$$\text{Tr } T_R(e) = n, \quad \text{Tr } T_R(g_i) = 0, \quad \forall g_i \neq e. \quad (3.13)$$

On en redérive le Théorème 3.7 : chaque représentation irréductible de G apparaît dans la représentation régulière un nombre de fois égal à sa dimension. En effet, dans la représentation régulière,

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr} \pi^{T^i} &= \frac{\dim T^i}{n} \sum_g \chi_i^*(g) \mathrm{Tr} T_R(g) \\ &= \frac{\dim T^i}{n} \chi_i^*(e) \mathrm{Tr} T_R(e) \\ &= (\dim T^i)^2\end{aligned}$$

car $\chi_i(e) = \dim T^i$. De là et de (3.12), il vient que la multiplicité m_i de T^i dans T est égale à

$$m_i = \frac{\mathrm{Tr} \pi^{T^i}}{\dim T^i} = \dim T^i.$$

3.8 Décomposition d'une représentation quelconque en représentations irréductibles

Si on connaît les éléments de matrice $\{(t^i)_{ab}(g)\}$ d'un système complet de représentations irréductibles, on peut pousser la décomposition de la représentation T (quelconque) jusqu'au bout.

On a

$$T = \bigoplus_{k=1}^m m_k T^k$$

et

$$V = \bigoplus_{k=1}^m Y^k$$

avec

$$Y^k = \bigoplus_{\alpha=1}^{m_k} Y_\alpha^k$$

où $T|_{Y_\alpha^k} \simeq T^k$ et donc $T|_{Y^k} \simeq m_k T^k$. Les Y^k sont les sous-espaces invariants de la section précédente, obtenus par action des projecteurs

$$\pi^{T^k} = \frac{n_k}{n} \sum_g \chi_k^*(g) T(g)$$

($\dim T^k = n_k$). Le problème est de trouver les sous-espaces invariants irréductibles Y_α^k .

Lorsque la multiplicité m_k est > 1 , la décomposition de Y^k en sous-espaces invariants n'est pas unique : alors que Y^k est bien défini, on verra que plusieurs choix sont possibles pour les sous-espaces invariants irréductibles Y_α^k .

Pour arriver à la décomposition cherchée, on introduit pour tout $i = 1, \dots, m$, les n_i^2 opérateurs :

$$\boxed{P_{ab}^i = \frac{n_i}{n} \sum_{g \in G} (t^i)_{ab}^*(g) T(g)} \quad \forall a, b = 1, \dots, n_i. \quad (3.14)$$

Lemme 3.12. Les opérateurs (3.14) obéissent aux propriétés suivantes :

1. $\sum_{a=1}^{n_i} P_{aa}^i = \pi^{T^i}$
2. $T(h)P_{ab}^i = \sum_{c=1}^{n_i} (t^i)_{ca}(h)P_{cb}^i$ et $P_{ab}^i T(h) = \sum_{c=1}^{n_i} (t^i)_{bc}(h)P_{ac}^i$
3. $P_{ab}^i P_{cd}^j = \delta_{ij} \delta_{bc} P_{ad}^i$
4. $(P_{ab}^i)^\dagger = P_{ba}^i$.

Démonstration. Ces propriétés se démontrent de la manière suivante :

1. Evident
2. On a :

$$\begin{aligned}
 T(h)P_{ab}^i &= \frac{n_i}{n} \sum_{g \in G} (t^i)_{ab}^*(g) T(h)T(g) \\
 &= \frac{n_i}{n} \sum_{g \in G} (t^i)_{ab}^*(g) T(hg) \\
 &= \frac{n_i}{n} \sum_{g \in G} (t^i)_{ab}^*(h^{-1}g') T(g') \quad (hg = g') \\
 &= \frac{n_i}{n} \sum_{g' \in G} \sum_{c=1}^{n_k} (t^i)_{ac}^*(h^{-1}) (t^i)_{cb}^*(g') T(g') \\
 &= \sum_{c=1}^{n_i} (t^i)_{ca}(h) P_{cb}^i
 \end{aligned}$$

car $(t^i)_{ac}^*(h^{-1}) = (t^i)_{ca}(h)$ (les représentations sont unitaires). De même,

$$\begin{aligned}
 P_{ab}^i T(h) &= \frac{n_i}{n} \sum_{g \in G} (t^i)_{ab}^*(g) T(g)T(h) \\
 &= \frac{n_i}{n} \sum_{g \in G} (t^i)_{ab}^*(g) T(gh) \\
 &= \frac{n_i}{n} \sum_{g' \in G} (t^i)_{ab}^*(g'h^{-1}) T(g') \quad (gh = g') \\
 &= \frac{n_i}{n} \sum_{g' \in G} \sum_{c=1}^{n_i} (t^i)_{ac}^*(g') (t^i)_{cb}^*(h^{-1}) T(g') \\
 &= \sum_{c=1}^{n_i} (t^i)_{bc}(h) P_{ac}^i.
 \end{aligned}$$

3. Un calcul direct donne

$$\begin{aligned}
 P_{ab}^i P_{cd}^j &= \frac{n_i}{n} \sum_{g \in G} (t^i)_{ab}^*(g) T(g) P_{cd}^j \\
 &= \frac{n_i}{n} \sum_{g \in G} (t^i)_{ab}^*(g) \sum_{e=1}^{n_j} (t^j)_{ec}(g) P_{ed}^j \quad (\text{par 2 ci-dessus}) \\
 &= n_i \sum_{e=1}^{n_j} ((t^i)_{ab} | (t^j)_{ec})_M P_{ed}^j \\
 &= \delta_{ij} \delta_{bc} P_{ad}^i \quad (\text{par les relations d'orthogonalité})
 \end{aligned}$$

4. Enfin,

$$\begin{aligned}
(P_{ab}^i)^\dagger &= \frac{n_i}{n} \sum_{g \in G} (t^i)_{ab}(g) T(g)^\dagger \\
&= \frac{n_i}{n} \sum_{g \in G} (t^i)_{ab}(g) T(g^{-1}) \\
&= \frac{n_i}{n} \sum_{g' \in G} (t^i)_{ab}(g'^{-1}) T(g') \\
&= \frac{n_i}{n} \sum_{g' \in G} (t^i)_{ba}^*(g') T(g') \\
&= P_{ba}^i
\end{aligned}$$

□

Il résulte en particulier des propriétés démontrées ci-dessus que

$$P_{aa}^i P_{bb}^j = \delta_{ij} \delta_{ab} P_{aa}^i$$

et

$$(P_{aa}^i)^\dagger = P_{aa}^i.$$

Les P_{ab}^i forment un système de projecteurs orthogonaux. On définit $V_a^i = P_{aa}^i V$. Si $v \in V_a^i$, alors, $v = P_{aa}^i v$. Les sous-espaces V_a^i sont orthogonaux pour différentes valeurs de i ou a ,

$$V_a^i \perp V_b^j \quad \text{si } i \neq j \quad \text{ou } a \neq b.$$

Nous n'avons pas encore trouvé les Y_a^i mais on s'en rapproche...

Proposition 3.12.1. $V = \bigoplus_{i=1}^m (\bigoplus_{a=1}^{n_i} V_a^i)$.

Démonstration. Soit $W = \bigoplus_{i=1}^m (\bigoplus_{a=1}^{n_i} V_a^i)$. Soit $v_0 \in V$ orthogonal à W , $(v_0|w) = 0$ pour tout $w \in W$. On aurait alors $(v_0|P_{aa}^i v) = 0$ pour tout $v \in V$ et donc $(v_0|P_{ab}^i v) = (v_0|P_{aa}^i P_{ab}^j v) = 0$ pour tout $v \in V$. Mais ce dernier produit scalaire dans V peut se réécrire

$$\begin{aligned}
0 &= (v_0|P_{ab}^i v) \\
&= \left(v_0 \left| \frac{n_i}{n} \sum_{g \in G} (t^i)_{ab}^*(g) T(g) v \right. \right) \\
&= \frac{n_i}{n} \sum_{g \in G} (t^i)_{ab}^*(g) f(g) \quad \text{où on a posé } f(g) = (v_0|T(g)v) \\
&= n_i ((t^i)_{ab}|f).
\end{aligned}$$

Mais les $\{(t^i)_{ab}\}$ forment une base de $L^2(G)$, donc la fonction $f \in L^2(G)$ est nulle pour tout $v \in V$, c-à-d.,

$$f(g) = (v_0|T(g)v) = 0$$

pour tout $g \in G$ et $v \in V$. Prenons $v = v_0$ et $g = e$ dans cette équation. On obtient $(v_0|v_0) = 0$ et donc $v_0 = 0$. Le seul vecteur orthogonal à V est le vecteur nul et par conséquent, $W = V$. □

Proposition 3.12.2. P_{ab}^i applique isométriquement (et donc bijectivement) V_b^i sur V_a^i ,

$$P_{ab}^i V_b^i = V_a^i, \quad (P_{ab}^i v | P_{ab}^i w) = (v, w) \quad \forall v, w \in V_b^i.$$

Démonstration. Si $v \in V_b^i \equiv P_{bb}^i V$, alors $P_{ab}^i v = P_{ab}^i P_{bb}^i v = P_{aa}^i P_{ab}^i v \in V_a^i$. Donc $P_{ab}^i V_b^i \subset V_a^i$. Mais d'autre part, $V_a^i = P_{aa}^i V_a^i = P_{ab}^i P_{ba}^i V_a^i \subset P_{ab}^i V_b^i$, ce qui implique $P_{ab}^i V_b^i = V_a^i$. En fait, l'application $P_{ab}^i : V_b^i \rightarrow V_a^i$ est non seulement bijective mais aussi isométrique car si $v, w \in V_b^i$, alors, $(P_{ab}^i v | P_{ab}^i w) = (v | P_{ba}^i P_{ab}^i w) = (v | P_{bb}^i w) = (v | w)$. \square

On peut à présent effectuer la décomposition complète de V . On note que $Y^i = \bigoplus_{a=1}^{n_i} V_a^i$. Soit m_i la dimension commune des V_a^i . Comme on cherche $Y^i = \bigoplus_{\alpha=1}^{m_i} Y_{\alpha}^i$, on en déduit qu'il faut que l'espace Y_{α}^i recherché soit de dimension n_i . Considérons d'abord V_1^i . Choisissons une base orthonormée $\{e_{\alpha 1}\}$ ($\alpha = 1, \dots, m_i$) de V_1^i ,

$$(e_{\alpha 1} | e_{\beta 1}) = \delta_{\alpha \beta}.$$

Cette base est définie à une transformation unitaire de V_1^i près. On définit ensuite $e_{\alpha a}^i = P_{a1}^i e_{\alpha 1}^i$. Les $\{e_{\alpha a}^i\}$ ($\alpha = 1, \dots, m_i$) forment une base orthonormée de V_a^i ,

$$(e_{\alpha a}^i | e_{\beta a}^i) = \delta_{\alpha \beta}$$

et de manière plus générale, on a

$$(e_{\alpha a}^i | e_{\beta b}^i) = \delta_{\alpha \beta} \delta_{ab}.$$

Soit Y_{α}^i le sous-espace correspondant à une valeur de α donnée, c'-à-d. le sous-espace à n_i dimensions engendré par les $e_{\alpha a}^i$ (α fixé, $a = 1, \dots, n_i$).

Proposition 3.12.3. Les sous-espaces Y_{α}^i sont invariants et $T|_{Y_{\alpha}^i} \simeq T^i$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} T(g)e_{\alpha a}^i &= T(g)P_{a1}^i e_{\alpha 1}^i \\ &= \sum_{b=1}^{n_i} (t^i)_{ba}(g)P_{b1}^i e_{\alpha 1}^i \\ &= \sum_{b=1}^{n_i} (t^i)_{ba}(g)e_{\alpha b}^i, \end{aligned}$$

ce qui démontre l'assertion. \square

La décomposition cherchée de Y^i est donc

$$Y^i = \bigoplus_{\alpha=1}^{m_i} Y_{\alpha}^i$$

A noter que pour les groupes de Lie compacts, tout le raisonnement est analogue; il faut dans ce cas remplacer les sommes sur les éléments du groupe par l'intégrale invariante sur le groupe.

($= \bigoplus_{a=1}^{m_i} V_a^i$). Elle n'est pas unique car il y a plusieurs manières de choisir la base de V_1^i . Une fois la base de V_1^i choisie, les sous-espaces invariants sont complètement déterminés par l'action du groupe. On peut voir Y_α^i comme le sous-espace invariant contenant le vecteur $e_{\alpha 1}$. Les vecteurs $e_{\alpha 1}$ "constituent m_i copies du premier vecteur de base" de la représentation T^i (dégénérée m_i fois), et chacun engendre un sous-espace invariant.

4

Système à trois ressorts et S_3

Comme application concrète de la théorie des représentations, nous exposerons le cas d'un système mécanique qui admet la symétrie S_3 . Nous commencerons par détailler les représentations de S_3 .

4.1 Représentations de S_3

Le groupe des permutations de 3 objets est généré par

$$S_3 = \{e, (123), (132), (12), (13), (23)\}$$
$$g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6$$

Il y a trois classes d'éléments conjugués

$$C_1 = \{e\},$$
$$C_2 = \{(12), (13), (23)\},$$
$$C_3 = \{(123), (132)\}$$

Il y a donc 3 représentations inéquivalentes. La dimension des représentations est 1, 1 et 2 car $6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$ est la seule possibilité.

Les 2 représentations de dimension 1

- La représentation triviale $T^1 : g \mapsto 1$. Les caractères sont tous $\chi_1(g) = 1$.
- La représentation alternée T^2 où les permutations paires sont envoyées sur 1 et les impaires sont envoyées sur -1 .

$$T^2(e) = T^2((123)) = T^2((132)) = 1,$$
$$T^2((12)) = T^2((13)) = T^2((23)) = -1.$$

La table des caractères est

T^2	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
χ_2	1	1	1	-1	-1	-1

La représentation T^3 de dimension 2 On peut déduire les caractères à partir des relations d'orthogonalité. On a

	e	$(123), (132)$	$(12), (13), (32)$
χ_1	1	1	1
χ_2	1	1	-1
χ_3	2	a	b

Les contraintes $(\chi_1|\chi_3) = 0$ et $(\chi_1|\chi_3) = 0$ sont $2 + 2a + 3b = 0$ et $2 + 2a - 3b = 0$ ce qui donne $b = 0$ et $a = -1$. On vérifie $(\chi_3|\chi_3) = 1$.

On peut construire la représentation de plusieurs manières. On peut partir de la représentation T à trois dimensions donnée par les matrices de permutation $\vec{e}_i \mapsto \vec{e}_{p(i)}$. On calcule les caractères :

$$e \mapsto I_{3 \times 3}, \quad (12) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (123) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\chi_T(e) = 3, \quad \chi_T((12)) = 1, \quad \chi_T((123)) = 0.$$

On trouve la décomposition

$$\chi_T = \chi_1 + \chi_3.$$

On peut donc trouver la représentation T^3 en décomposant la représentation T comme la somme directe de la représentation triviale et de T^3 .

Une manière plus directe de procéder consiste à observer que S_3 est isomorphe au groupe de symétrie du triangle équilatéral.

$$e \mapsto I_{2 \times 2},$$

$$(123) \mapsto \text{Rotation de } -120^\circ = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$(132) \mapsto \text{Rotation de } 120^\circ = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$(12) \mapsto \text{Réflexion selon } O_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

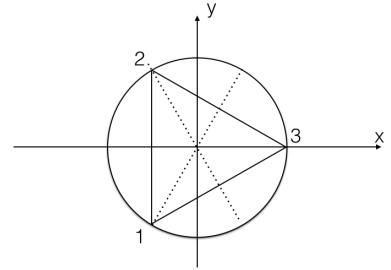
$$(13) \mapsto \text{Réflexion selon un axe de } -60^\circ = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$(23) \mapsto \text{Réflexion selon un axe de } 60^\circ = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Représentation régulière Dans la base des fonctions $e_i, e_i(g_j) = \delta_{ij}$. La définition de la représentation régulière

$$T_R(g)e_h = e_{hg^{-1}}$$

On prend la convention selon laquelle les matrices de permutation agissent à droite sur un vecteur ligne d'objets, comme (3.1).



Vérifions que le produit $(13)(12) = (123)$ soit correctement représenté. Notons que l'on applique d'abord (12) et ensuite (13). Comme on agit sur des vecteurs lignes à gauche, on doit calculer

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ce qui donne bien le bon produit.

Il projette sur le sous-espace $V_1 = \lambda x$,

$$x = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

des covecteurs ayant toutes les composantes égales. Nous avons normé $x \cdot x = 1$. On vérifie la propriété d'invariance : $T_R(g)V_1 \subset V_1 \forall g \in G$. De plus, on a exactement $T_R(g)x = x$. La représentation $T_R|_{V_1}$ est donc bien la représentation triviale T^1 .

Sous-espace invariant associé à T^2 Le projecteur vaut

$$\pi^{T^2} = \frac{1}{6} \sum_{g \in G} \chi_2^*(g) T_R(g) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il projette sur le sous-espace $V_2 = \lambda y$,

$$y = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a $T_R(g)y = \pm y$ avec le signe + si g est paire et – si g est impaire. La représentation $T_R|_{V_2}$ est donc bien la représentation alternée T^2 . Aussi, les deux vecteurs propres x, y de $T_R(g)$ sont orthogonaux, $x \cdot y = 0$.

Sous-espace invariant associé à T^3 Le projecteur vaut

$$\pi^{T^3} = \frac{2}{6} \sum_{g \in G} \chi_3^*(g) T_R(g) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On cherche les covecteurs v tels que $v\pi^{T^3} = \lambda v$. Après un peu d'algèbre on trouve que les composantes v_i de v obéissent à $v_1 + v_2 + v_3 = 0$ et $v_4 + v_5 + v_6 = 0$. De tels covecteurs forment un espace vectoriel V_3 à 4 dimensions. La représentation est donc réductible, et on a $T_R|_{V_3} = 2T^3$. Pour mettre en évidence les deux représentations T^3 on décompose V_3 comme $V_3 = V_3^1 \oplus V_3^2$ où $V_3^1 \simeq V_3^2$ est bidimensionnel.

La base de V_3^1 dans laquelle la représentation de S_3 est donnée par les matrices 2×2 données en (4.1) est caractérisée par la propriété que les covecteurs de base sont les vecteurs propres de $T^3((12)) = T^3(g_4)$ pour les valeurs propres -1 et 1 .

Cherchons donc dans V_3 les vecteurs propres de $T_R(g_4)$ pour la valeur propre 1 :

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{pmatrix}$$

On a $v_4 = v_1, v_5 = v_2, v_6 = v_3$. Les vecteurs doivent aussi appartenir à V_3 . On a deux solutions linéairement indépendantes. Il est intéressant de choisir une base orthonormée. Par exemple :

$$\begin{aligned} v &\equiv \frac{1}{2} (1 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad -1 \quad 0), \\ v' &\equiv \frac{1}{2\sqrt{3}} (1 \quad 1 \quad -2 \quad 1 \quad 1 \quad -2). \end{aligned}$$

On peut définir le sous-espace V_3^1 comme le sous-espace invariant qui contient v , et le sous-espace V_3^2 comme le sous-espace invariant qui contient v' .

On trouve V_3^1 en agissant avec un autre élément de la représentation, par exemple $T_R(g_2)$. On trouve $T_R(g_2)v = \frac{1}{2}(-1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ -1)$. Comme

$$T^3(g_2)(1 \ 0) = (1 \ 0) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{2} \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

il est plus naturel de choisir comme deuxième covecteur de base dans V_3^1

$$w \equiv -\frac{2}{\sqrt{3}} \left[T_R(g_2) + \frac{1}{2} T_R(g_4) \right] v = \frac{1}{2\sqrt{3}} (1 \quad 1 \quad -2 \quad -1 \quad -1 \quad 2)$$

Le covecteur w est clairement dans V_3^1 et est vecteur propre de $T_R(g_4)$ pour la valeur propre -1 . Il est aussi orthogonal à v , $w \cdot v = 0$, et normé $w \cdot w = 1$. Le sous-espace V_3^1 généré par v et w est invariant car il est invariant sous $T_R(e)$, $T_R((12))$ et $T_R((123))$ qui génèrent tout le groupe. Dans ce sous-espace, T_R se réduit à T^3 et les vecteurs sont représentés par $v = (1 \ 0)$, $w = (0 \ 1)$.

On définit similairement le second covecteur de base w' de V_3^2 comme

$$w' \equiv -\frac{2}{\sqrt{3}} \left[T_R(g_2) + \frac{1}{2} T_R(g_4) \right] v' = \frac{1}{2} (1 \quad -1 \quad 0 \quad -1 \quad 1 \quad 0).$$

qui obéit à $w' \cdot v' = 0$, $w' \cdot w' = 1$.

Base bloc diagonale En prenant les 6 covecteurs de base x, y, v, w, v', w' comme nouvelle base, on ramène toutes les matrices $T_R(g)$ à une forme diagonale par blocs. Plus précisément, on construit la matrice O orthogonale, $O^T O = I$, comme

$$O = \begin{pmatrix} x \\ y \\ v \\ w \\ v' \\ w' \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

et on vérifie l'égalité

$$O T_R(g) O^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & T^2(g) & & & & \\ & & T^3(g) & & & \\ & & & \tilde{T}^3(g) & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix}.$$

où la représentation \tilde{T}^3 est équivalente à la représentation T^3 , $\tilde{T}^3 \sim T^3$. Ses matrices de représentation sont données explicitement par

$$\tilde{T}^3(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} T^3(g) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On peut absorber cette transformation de similitude en changeant l'orientation de $w', w' \mapsto -w'$. Appelons O' la matrice

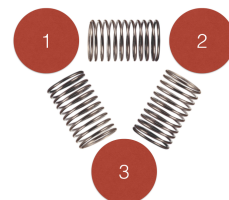
$$O' = \begin{pmatrix} x \\ y \\ v \\ w \\ v' \\ -w' \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Elle est toujours orthogonale et on a

$$O' T_R(g) O'^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & T^2(g) & & & & \\ & & T^3(g) & & & \\ & & & T^3(g) & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix}.$$

4.2 Modes d'oscillation d'un système de 3 ressorts identiques

On considère trois masses ponctuelles égales attachées par des ressorts identiques. Les masses sont libres de se déplacer sans frottement sur une surface plane. Les seules forces en jeu sont les forces de rappel des ressorts.



Les positions 1,2,3 forment un triangle équilatéral de longueur ℓ où ℓ est la longueur des ressorts à l'équilibre. Soient $(\bar{x}_1, \bar{y}_1; \bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{x}_3, \bar{y}_3)$ les coordonnées d'une position d'équilibre. On pose

$$x_i = \bar{x}_i + u_i \quad (4.5)$$

$$y_i = \bar{y}_i + v_i \quad (4.6)$$

pour tout $i = 1, 2, 3$. Les $q^a \equiv (u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3)$, $a = 1, \dots, 6$ mesurent le déplacement du système par rapport à la configuration d'équilibre.

L'énergie potentielle d'un ressort est donnée par $\frac{k}{2}\Delta\ell$ où $\Delta\ell$ est l'élongation du ressort par rapport à sa position d'équilibre et k sa raideur. Dans l'approximation des petits déplacements, l'Hamiltonien est donné par

$$H = \frac{1}{2}m \sum_{i=1,2,3} (\dot{u}_i^2 + \dot{v}_i^2) + \frac{k}{2}V_{ab}q^a q^b \quad (4.7)$$

$$= \frac{m}{2} \sum_{a=1}^6 (\dot{q}^a)^2 + \frac{k}{2}V_{ab}q^a q^b \quad (4.8)$$

pour une matrice V_{ab} symétrique que l'on peut calculer à partir de la géométrie du problème.

On aimerait trouver les modes propres du système, c'.à.d. diagonaliser la matrice 6×6 V_{ab} .

Invariance sous S_3 La recherche des modes propres est grandement simplifiée si l'on tient compte des symétries. Le système est en effet invariant sous les transformations de symétrie du triangle équilatéral, c'.à.d. S_3 .

Les q^a forment une représentation T à 6 dimensions. Sous la transformation $q^{a'} = T_{ab}q^b$, l'invariance du système requiert l'invariance du terme cinétique et potentiel. Le terme cinétique est préservé ssi T_{ab} est une matrice orthogonale, $T_{ab} \in O(6)$. Le terme potentiel est préservé sous la condition

$$V_{ab}q^{a'}q^{b'} = V_{ab}T_{ac}T_{bd}q^c q^d = V_{cd}q^c q^d$$

ce qui se lit en forme matricielle comme $T^T V T = V$ ou encore

$$V T(g) = T(g) V$$

après avoir utilisé $T^T = T^{-1}$. Les matrices V et $T(g)$ sont donc entrelacées.

On remarque que chaque action de S_3 peut être décomposée en une permutation $p(i)$ des masses i et une action ponctuelle sur chaque masse :

$$\begin{pmatrix} u'_i \\ v'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{p(i)} \\ v_{p(i)} \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Les équations du mouvement sont $m\ddot{q}^a = -kV_{ab}q^b$. Les modes propres correspondent aux solutions $q^a = e^{i\omega t} \zeta^a$ telles que $V_{ab}\zeta^b = \frac{m\omega^2}{k}\zeta^a$. Les fréquences propres ω_a sont donc données en termes des valeurs propres λ_a de V_{ab} comme $\omega_a = \sqrt{\frac{k\lambda_a}{m}}$.

La représentation T est donc un produit direct

$$T = \tilde{T} \otimes S$$

où \tilde{T} est la représentation de dimension 2 ponctuelle et S est la représentation de dimension 3 qui permute les masses. Il n'y a qu'une représentation de dimension 2, la représentation irréductible T^3 donc $\tilde{T} \simeq T^3$. Nous avons vu que la représentation des matrices de permutations 3×3 est réductible et se décompose comme

$$S = T^1 \oplus T^3.$$

Nous avons donc

$$T = T^3 \otimes (T^1 \oplus T^3) = (T^3 \otimes T^1) \oplus (T^3 \otimes T^3).$$

Il est clair que $T^3 \otimes T^1 = T^3$ ¹. Pour identifier $T^3 \otimes T^3$ on calcule $\chi_3(e)\chi_3(e) = 4$, $\chi_3((123))\chi_3((123)) = 1$, $\chi_3((12))\chi_3((12)) = 0$. On trouve la décomposition $\chi_3\chi_3 = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3$ et par conséquent

$$T^3 \otimes T^3 = T^1 \oplus T^2 \oplus T^3.$$

En conclusion

$$T = T^1 \oplus T^2 \oplus 2T^3 \simeq T_R$$

ce qui est en fait équivalent à la représentation régulière. Bien entendu, la base utilisée pour q^a est celle basée sur la géométrie du problème alors que la base utilisée dans les sections précédentes est la base canonique de la représentation régulière.

Comme on l'a vu, il existe une base dans laquelle T prend la forme

$$T(g) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & T^2(g) & & \\ & & T^3(g) & \\ & & & T^3(g) \end{pmatrix}$$

Comme la matrice V est une matrice d'entrelacement et est orthogonale, elle doit prendre la forme

$$V = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \alpha I_{2 \times 2} & \beta I_{2 \times 2} \\ & & \beta I_{2 \times 2} & \gamma I_{2 \times 2} \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

La méthode directe pour obtenir les modes de vibration consiste à calculer la matrice V_{ab} à partir de sa définition, trouver la base dans laquelle elle prend la forme (4.10) en utilisant les projecteurs et obtenir les valeurs et vecteurs propres.

Ici, nous donnons simplement les quatres modes de vibrations résultants :

1. On le vérifie en utilisant les caractères : $\chi_3(g)\chi_1(g) = \chi_3(g)$, $\forall g \in S_3$.

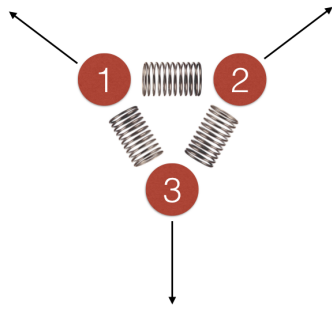


FIGURE 4.1: Mode de respiration. Représentation T^1 . Le vecteur correspondant est

$$\zeta^a = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}; 0, -1\right).$$

Le triangle garde sa forme mais croît ou décroît. Il est clair que ce vecteur est invariant sous toutes les transformations de S_3 . La valeur propre est non-nulle car elle change l'énergie potentielle.

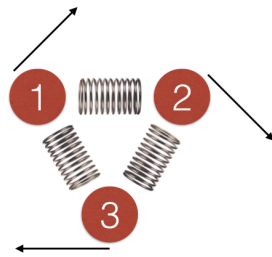


FIGURE 4.2: Mode de rotation. Représentation T^2 . Le vecteur correspondant est

$$\zeta^a = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}; 1, 0\right).$$

Le triangle reste identique. Il est clair que ce vecteur est invariant sous A_3 mais change de signe sous réflexions. La valeur propre est 0.

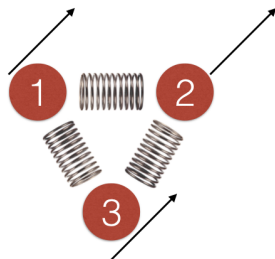


FIGURE 4.3: Mode de translation. Représentation T^3 . Les deux vecteurs correspondants sont les translations selon x et selon y :

$$(1, 0; 1, 0; 1, 0)$$

$$(0, 1; 0, 1; 0, 1)$$

Ce sont des vecteurs propres de valeur propre 0.

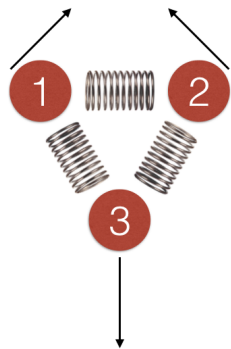


FIGURE 4.4: Mode de déformation. Représentation T^3 . Ce sont les modes intrinsèques à la géométrie du système.

Bibliographie pour la partie groupes finis

- James Humphreys, *A Course in Group Theory*, Oxford University Press, 1996
- James Humphreys, *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge Studies in advanced mathematics, 1990
- Pierre Ramond, *Group Theory : A Physicist's Survey*, Cambridge University Press, 2010
- J.F. Cornwell, *Group Theory in Physics*, Vol 1. et Vol 2., Academic Press - Elsevier, 1984
- M. Naimark et A. Stern, *Théorie des représentations des groupes*, Editions MIR, 1979
- S. Chatterjee, *Crystallography and the World of Symmetry*, Springer, 2008

